Combinatoire et dénombrement

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Dénombrer des ensembles finis

Table des matières

1 Principe additif et principe multiplicatif **1**
1.1 Ensembles finis et cardinal . . . 1
1.2 Principe additif . . . 2
1.3 Produit cartésien et principe multiplicatif . . . 2

2 k-uplets et permutations **3**
2.1 Nombre de k-uplets . . . 3
2.2 Nombre de parties d'un ensemble . . . 4
2.3 Nombre de k-uplets d'éléments distincts . . . 5
2.4 Permutations . . . 6

3 Combinaisons **7**
3.1 Nombre de combinaisons . . . 7
3.2 Représentation en termes de mots ou de chemins . . . 9
3.3 Propriétés des coefficients binomiaux . . . 9
3.4 Triangle de Pascal . . . 10
3.5 Somme des coefficients binomiaux . . . 11

4 Bilan : quel modèle choisir ? **12**

1 Principe additif et principe multiplicatif

1.1 Ensembles finis et cardinal

Définition 1.1: Ensemble fini, cardinal

— Un ensemble E est **fini** s'il contient un nombre fini d'éléments.
— Ce nombre d'éléments est appelé **cardinal** de E et se note $\text{Card}(E)$ (ou $|E|$).
— **Dénombrer** un ensemble fini, c'est déterminer son cardinal.

Exemple 1.2

— L'ensemble $E = \{1\,;3\,;5\,;7\,;9\}$ des chiffres impairs est fini et $\text{Card}(E) = 5$.
— L'ensemble vide $\varnothing$ est fini et $\text{Card}(\varnothing) = 0$.
— L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas fini.

Définition 1.3: Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire si $A \cap B = \varnothing$.
Des ensembles E_1, E_2, …, E_p sont **deux à deux disjoints** si deux quelconques d'entre eux sont disjoints.

1.2 Principe additif

Propriété 1.4: Principe additif

Si E_1, E_2, …, E_p sont des ensembles finis **deux à deux disjoints**, alors :

$$\text{Card}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \cdots + \text{Card}(E_p).$$

Exemple 1.5

Un sac contient $\{a\,;b\,;c\}$ jetons-lettres et $\{1\,;2\,;3\,;4\}$ jetons-chiffres. Ces deux ensembles sont disjoints : le sac contient $3+4=7$ jetons.

Remarque : Ensembles non disjoints

Si A et B ne sont pas disjoints, la somme $\text{Card}(A)+\text{Card}(B)$ compte deux fois les éléments de $A\cap B$. On a alors :

$$\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A\cap B).$$

En pratique, on découpe la situation en zones disjointes à l'aide d'un **diagramme de Venn**, puis on applique le principe additif.

Méthode 1.6: Dénombrer à l'aide d'un diagramme

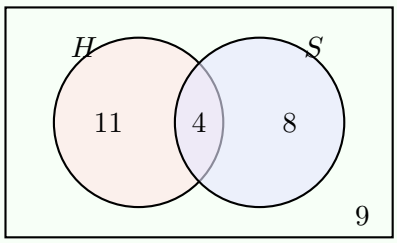
Dans une classe, 15 élèves font partie de la chorale, 12 de l'association sportive, 4 des deux, et 9 élèves ne font partie d'aucune des deux.
Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Correction

On note H l'ensemble des élèves de la chorale et S celui des élèves de l'association sportive : $\text{Card}(H)=15$, $\text{Card}(S)=12$ et $\text{Card}(H\cap S)=4$. H et S ne sont pas disjoints : on découpe la classe en quatre zones deux à deux disjointes.

- chorale seulement : $15-4=11$;
- association sportive seulement : $12-4=8$;
- les deux : 4 ; aucune : 9.

D'après le principe additif, la classe compte $11+4+8+9=32$ élèves.



1.3 Produit cartésien et principe multiplicatif

Définition 1.7: Produit cartésien

Soit E_1, E_2, …, E_p des ensembles finis.

- Le produit cartésien $E_1\times E_2$ est l'ensemble des **couples** $(a_1\,;a_2)$ où $a_1\in E_1$ et $a_2\in E_2$.
- Plus généralement, $E_1\times E_2\times\cdots\times E_p$ est l'ensemble des **p-uplets** $(a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_p)$ où $a_1\in E_1$, $a_2\in E_2$, …, $a_p\in E_p$.

Remarque

Dans un couple ou un p-uplet, l'**ordre compte** : $(1\,;2)\neq(2\,;1)$. Un même élément peut apparaître plusieurs fois : $(1\,;1)$ est un couple.

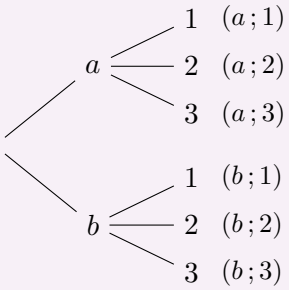
Propriété 1.8: Principe multiplicatif

Si E_1, E_2, …, E_p sont des ensembles finis, alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \cdots \times \text{Card}(E_p).$$

Remarque : Arbre de choix

On peut visualiser le principe multiplicatif avec un arbre : pour $E_1 = \{a\,;b\}$ et $E_2 = \{1\,;2\,;3\}$, chacune des 2 branches de départ se divise en 3 branches, soit $2 \times 3 = 6$ couples au bout de l'arbre.



Méthode 1.9: Appliquer le principe multiplicatif

Une sandwicherie propose 4 sortes de pain, 5 garnitures et 3 sauces.

a) Combien de sandwichs différents composés d'un pain, d'une garniture et d'une sauce peut-on composer ?

b) Même question si la sauce est imposée.

Correction

a) On note P, G et S les ensembles des pains, des garnitures et des sauces. Un sandwich est un triplet (pain, garniture, sauce) de $P \times G \times S$. D'après le principe multiplicatif :

$$\text{Card}(P \times G \times S) = 4 \times 5 \times 3 = 60.$$

On peut composer 60 sandwichs différents.

b) Il reste à choisir un couple de $P \times G$: $\text{Card}(P \times G) = 4 \times 5 = 20$ sandwichs.

2 k-uplets et permutations

2.1 Nombre de k-uplets

Remarque : À retenir

Ici, **l'ordre compte** et **les répétitions sont autorisées**.

Définition 2.1: k-uplet

Soit E un ensemble et k un entier naturel non nul. Un **k-uplet** (ou k-liste) d'éléments de E est un élément de $E^k = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ facteurs}}$, c'est-à-dire une liste ordonnée $(a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_k)$ de k éléments de E, distincts ou non.

Propriété 2.2: Nombre de k-uplets

Si E est un ensemble fini à n éléments, alors le nombre de k-uplets d'éléments de E est :

$$\text{Card}\left(E^k\right) = n^k.$$

Démonstration. On applique le principe multiplicatif au produit cartésien $E \times E \times \cdots \times E$ (k facteurs) : $\text{Card}\left(E^k\right) = n \times n \times \cdots \times n = n^k$. □

Exemple 2.3

On lance trois fois un dé à six faces et on note la liste des résultats. Une issue est un triplet de $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$: il y a $6^3 = 216$ issues.

Méthode 2.4: Dénombrer des k-uplets

a) Combien existe-t-il de codes PIN à 4 chiffres ?
b) Un mot de passe est formé de 2 lettres majuscules suivies de 3 chiffres (par exemple `QZ072`). Combien existe-t-il de tels mots de passe ?

Correction

a) Un code PIN est un 4-uplet de l'ensemble $N = \{0\,;1\,;\ldots\,;9\}$ des chiffres, qui a 10 éléments : il y a $10^4 = 10\,000$ codes.

b) On note L l'ensemble des 26 lettres. Un mot de passe est un élément de $L^2 \times N^3$: d'après le principe multiplicatif, il y en a

$$\text{Card}\left(L^2\right) \times \text{Card}\left(N^3\right) = 26^2 \times 10^3 = 676\,000.$$

2.2 Nombre de parties d'un ensemble

Définition 2.5: Partie d'un ensemble

Une **partie** (ou sous-ensemble) de E est un ensemble A dont tous les éléments appartiennent à E. On note $A \subset E$.
L'ensemble vide $\varnothing$ et E lui-même sont des parties de E.

Exemple 2.6

Les parties de $E = \{a\,;b\,;c\}$ sont :

$$\varnothing,\quad \{a\},\quad \{b\},\quad \{c\},\quad \{a\,;b\},\quad \{a\,;c\},\quad \{b\,;c\},\quad \{a\,;b\,;c\}.$$

Il y en a $8 = 2^3$.

Propriété 2.7: Nombre de parties

Si E est un ensemble fini à n éléments, alors E possède 2^n parties.

Démonstration (codage par des 0 et des 1). On numérote les éléments de $E = \{e_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_n\}$. À toute partie A de E, on associe le n-uplet de $\{0\,;1\}$ noté $(x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n)$ et défini par :

$$x_i = 1 \text{ si } e_i \in A \qquad \text{et} \qquad x_i = 0 \text{ si } e_i \notin A.$$

Chaque partie correspond ainsi à un unique n-uplet de $\{0\,;1\}$, et réciproquement. Il y a donc autant de parties de E que de n-uplets de $\{0\,;1\}$, c'est-à-dire 2^n. □

Exemple 2.8

Avec $E = \{a\,;b\,;c\}$: la partie $\{a\,;c\}$ est codée par $(1\,;0\,;1)$, la partie $\varnothing$ par $(0\,;0\,;0)$ et E par $(1\,;1\,;1)$.

2.3 Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Remarque : À retenir

Ici, **l'ordre compte** et **les répétitions sont interdites**.

Exemple 2.9

Huit coureurs disputent une course. Combien de podiums (1^{er}, 2^{e}, 3^{e}) sont possibles ?
- 8 choix pour le premier ;
- le premier étant fixé, 7 choix pour le deuxième (un coureur ne peut pas occuper deux places) ;
- les deux premiers étant fixés, 6 choix pour le troisième.

D'après le principe multiplicatif, il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

Définition 2.10: k-uplet d'éléments distincts

Soit E un ensemble à n éléments et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Un **$k$-uplet d'éléments distincts** de E est un k-uplet de E dont les éléments sont deux à deux différents.

Remarque : Vocabulaire

On parle aussi d'**arrangement** de k éléments parmi n. Ce mot n'est pas utilisé dans le programme, mais on le rencontre souvent.

Définition 2.11: Factorielle

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on appelle **factorielle** n le nombre

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple 2.12

$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $10! = 3\,628\,800$.

Pour tout $n \geqslant 1$: $n! = n \times (n-1)!$. Par exemple $\dfrac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$.

Propriété 2.13: Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Soit E un ensemble à n éléments et $1 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est :

$$\underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Démonstration. Il y a n choix pour le premier élément, puis $n-1$ pour le deuxième (différent du premier), …, et $n-(k-1) = n-k+1$ choix pour le k-ième (différent des $k-1$ premiers). Le principe multiplicatif donne le produit.

En multipliant et divisant par $(n-k)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-k)$, on obtient :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Méthode 2.14: Dénombrer des k-uplets d'éléments distincts

Un bureau de vote doit désigner, parmi 12 volontaires, un président, un secrétaire et un assesseur (trois personnes différentes).

a) Combien de bureaux différents peut-on former ?

b) Les volontaires tirent au sort les trois rôles. Quelle est la probabilité que Léa soit présidente, Sami secrétaire et Inès assesseure ?

Correction

a) Les rôles sont différents, donc l'ordre compte, et une même personne ne peut pas avoir deux rôles. Un bureau est un triplet d'éléments distincts d'un ensemble à 12 éléments :

$$12 \times 11 \times 10 = \frac{12!}{9!} = 1320 \text{ bureaux.}$$

b) Les 1320 bureaux sont équiprobables et un seul convient : la probabilité est $\frac{1}{1320}$.

2.4 Permutations

Définition 2.15: Permutation

Soit E un ensemble à n éléments. Une **permutation** de E est un n-uplet d'éléments distincts de E : c'est une façon d'**ordonner tous** les éléments de E.

Exemple 2.16

Les permutations de $\{a\,;b\,;c\}$ sont : $(a\,;b\,;c)$, $(a\,;c\,;b)$, $(b\,;a\,;c)$, $(b\,;c\,;a)$, $(c\,;a\,;b)$ et $(c\,;b\,;a)$.

Propriété 2.17: Nombre de permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Démonstration. C'est le cas $k = n$ de la propriété précédente : $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$. □

Méthode 2.18: Dénombrer des permutations

On range 5 livres différents sur une étagère, dont un roman et sa suite.

a) De combien de façons peut-on ranger les livres ?

b) Même question si le roman et sa suite doivent être côte à côte, dans un ordre quelconque.

c) Combien y a-t-il d'anagrammes (avec ou sans signification) du mot « MATHS » ?

Correction

a) Un rangement est une permutation des 5 livres : $5! = 120$ rangements.

b) On regroupe le roman et sa suite en un seul bloc. On range alors 4 objets (le bloc et les 3 autres livres) : $4! = 24$ façons. À l'intérieur du bloc, il y a $2! = 2$ ordres possibles. D'après le principe multiplicatif : $24 \times 2 = 48$ rangements.

c) Les 5 lettres de « MATHS » sont distinctes : une anagramme est une permutation de ces lettres, soit $5! = 120$ anagrammes.

Méthode 2.19: Générer les permutations d'un ensemble (Python)

La fonction récursive suivante renvoie la liste de toutes les permutations d'une liste `L` d'éléments distincts : on choisit le premier élément, puis on place derrière chacune des permutations des éléments restants.

```
1 def permutations(L):
2     if len(L) <= 1:
3         return [L]
4     resultat = []
5     for i in range(len(L)):
6         reste = L[:i] + L[i+1:]
7         for p in permutations(reste):
8             resultat.append([L[i]] + p)
9     return resultat
```

`permutations(['a', 'b', 'c'])` renvoie les $3! = 6$ permutations de l'exemple précédent.

Pour un **tirage aléatoire** d'une permutation, le module `random` fournit `shuffle(L)`, qui mélange la liste `L`.

3 Combinaisons

3.1 Nombre de combinaisons

Remarque : À retenir

Ici, **l'ordre ne compte pas** et **les répétitions sont interdites**.

Définition 3.1: Combinaison

Soit E un ensemble à n éléments et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Une **combinaison** de k éléments de E est une **partie** de E à k éléments.

Exemple 3.2

Les combinaisons de 2 éléments de $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ sont :

$$\{a\,;b\},\quad \{a\,;c\},\quad \{a\,;d\},\quad \{b\,;c\},\quad \{b\,;d\},\quad \{c\,;d\}.$$

Il y en a 6. Comme ce sont des ensembles, $\{a\,;b\} = \{b\,;a\}$: l'ordre ne compte pas.

Notation 3.3: Coefficient binomial

Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments se note $\binom{n}{k}$, et se lit « k parmi n ». On l'appelle aussi **coefficient binomial**.

Propriété 3.4: Calcul de $\binom{n}{k}$

Pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Démonstration. Pour $k \geqslant 1$, on compte de deux façons les k-uplets d'éléments distincts de E.

— Il y en a $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ d'après la propriété 2.13.
— Pour former un tel k-uplet, on peut aussi choisir d'abord la partie à k éléments qui le compose ($\binom{n}{k}$ choix), puis l'ordre de ces k éléments ($k!$ permutations).

Donc $\binom{n}{k} \times k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, d'où le résultat. Pour $k = 0$, la seule partie à 0 élément est $\varnothing$, et $\dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$. □

Propriété 3.5: Cas particuliers

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \binom{n}{n} = 1.$$

Remarque : À la calculatrice

La fonction se nomme **Combinaison** ou **nCr** : $\binom{25}{3}$ s'obtient par `25 nCr 3`. En Python, on utilise `comb(25, 3)` du module `math`.

Méthode 3.6: Dénombrer des combinaisons

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (qui contient 4 as). On appelle « main » l'ensemble des 5 cartes obtenues.
a) Combien y a-t-il de mains possibles ?
b) Combien de mains contiennent exactement 2 as ?
c) Combien de mains contiennent au moins un as ?

Correction

a) Le tirage est simultané : l'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition. Une main est une combinaison de 5 cartes parmi 32 :

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5!} = 201\,376 \text{ mains.}$$

b) On choisit 2 as parmi 4, puis 3 cartes parmi les 28 autres. D'après le principe multiplicatif :

$$\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 6 \times 3276 = 19\,656 \text{ mains.}$$

c) On passe par le complémentaire : les mains sans as sont les combinaisons de 5 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as. Il y a donc

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 201\,376 - 98\,280 = 103\,096 \text{ mains avec au moins un as.}$$

Méthode 3.7: Générer les parties à 2 éléments (Python)

La fonction suivante renvoie la liste des parties à 2 éléments d'un ensemble représenté par une liste `E` d'éléments distincts. Pour ne pas obtenir deux fois la même partie, on impose $i < j$.

```python
def parties_deux(E):
    resultat = []
    for i in range(len(E)):
        for j in range(i+1, len(E)):
            resultat.append([E[i], E[j]])
    return resultat
```

`parties_deux([1, 2, 3, 4])` renvoie les $\binom{4}{2} = 6$ parties. Avec une troisième boucle `for` sur `l` allant de `j+1` à `len(E)-1`, on obtient les parties à 3 éléments.

3.2 Représentation en termes de mots ou de chemins

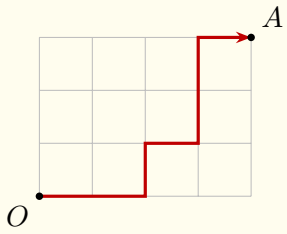
Propriété 3.8: Mots binaires

Le nombre de mots de longueur n formés de k lettres « a » et de $n-k$ lettres « b » est $\binom{n}{k}$.

Démonstration. Un tel mot est entièrement déterminé par l'ensemble des k positions (parmi les n) occupées par la lettre a : c'est une partie à k éléments de $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$. □

Exemple 3.9: Chemins sur un quadrillage

On se déplace sur un quadrillage en partant de O pour aller en A, uniquement par des pas vers la droite (D) ou vers le haut (H).
Un chemin de O à A comporte 4 pas D et 3 pas H : c'est un mot de 7 lettres contenant 3 lettres H. Par exemple, le chemin en rouge correspond au mot DDHDHHD.
Il y a donc $\binom{7}{3} = 35$ chemins de O à A.



3.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 3.10: Symétrie

Pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Choisir les k éléments d'une partie revient à choisir les $n-k$ éléments que l'on ne prend pas : à chaque partie à k éléments correspond exactement une partie à $n-k$ éléments, son complémentaire.

Par le calcul : $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$. □

Exemple 3.11

$$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20\times 19}{2} = 190.$$

Propriété 3.12: Relation de Pascal

Pour tous entiers n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration au programme (méthode combinatoire). Soit E un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E. Les parties de E à k éléments se répartissent en deux catégories disjointes :

- celles qui **contiennent** a : il reste à choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ autres, soit $\binom{n-1}{k-1}$ parties ;
- celles qui **ne contiennent pas** a : on choisit les k éléments parmi les $n-1$ autres, soit $\binom{n-1}{k}$ parties.

D'après le principe additif : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. □

Démonstration au programme (par le calcul). On utilise $k! = k \times (k-1)!$ et $(n-k)! = (n-k) \times (n-1-k)!$ pour réduire au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times (k+n-k)}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

3.4 Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche : chaque coefficient est la somme du coefficient situé juste au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Par exemple : $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10 = \binom{5}{3}$. On lit aussi $\binom{6}{2} = 15$.

Méthode 3.13: Calculer une ligne du triangle de Pascal (Python)

La fonction suivante renvoie la liste $[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}]$ en construisant chaque ligne à partir de la précédente grâce à la relation de Pascal.

```
1 def ligne_pascal(n):
2     ligne = [1]
3     for i in range(n):
4         nouvelle = [1]
5         for k in range(1, len(ligne)):
6             nouvelle.append(ligne[k-1] + ligne[k])
7         nouvelle.append(1)
8         ligne = nouvelle
9     return ligne
```

`ligne_pascal(4)` renvoie `[1, 4, 6, 4, 1]`.

3.5 Somme des coefficients binomiaux

Propriété 3.14: Somme d'une ligne du triangle de Pascal

Pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Démonstration au programme (par dénombrement). Soit E un ensemble à n éléments. On compte les parties de E de deux façons.

— On les classe selon leur nombre d'éléments k, qui va de 0 à n. Pour chaque k, il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments, et ces catégories sont deux à deux disjointes. D'après le principe additif, E possède $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ parties.

— D'après la propriété 2.7, E possède 2^n parties.

Donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. □

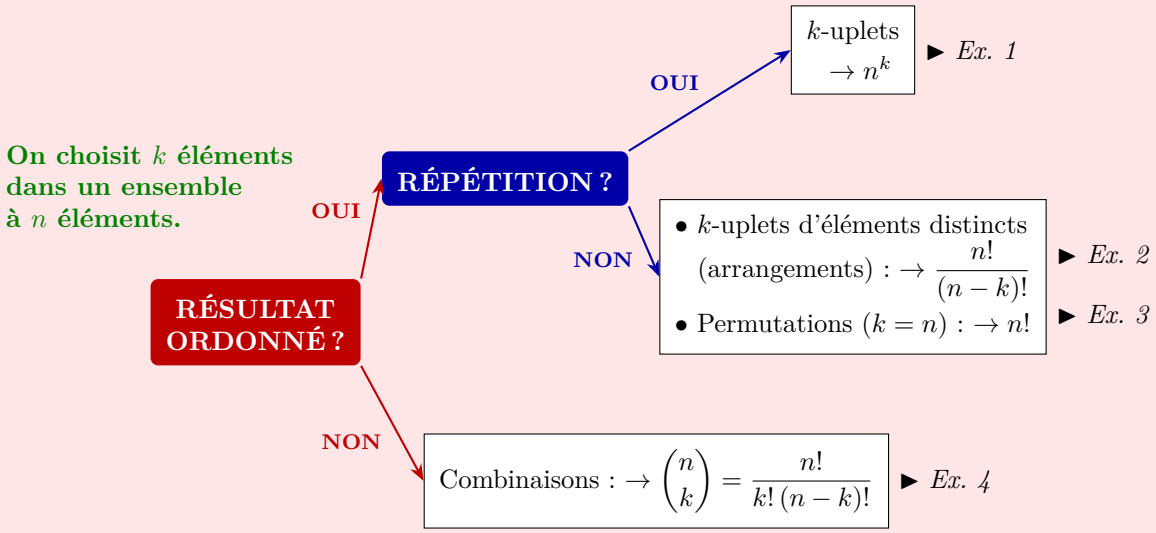
Exemple 3.15

Ligne $n = 4$ du triangle : $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

4 Bilan : quel modèle choisir ?

Bilan

Pour résumer : k-uplet, permutation, combinaison... lequel choisir ?



Et toujours : découper en cas disjoints (principe additif), enchaîner des choix (principe multiplicatif), ou passer par le **complémentaire** pour les « au moins un ».

Exemple 4.1: Les quatre situations du schéma

Ex. 1 Nombre de mots de 3 lettres de l'alphabet. *(Ordonné, avec répétition.)*

$\to$ nombre de triplets d'un ensemble à 26 éléments : $26^3 = 17\,576$.

Ex. 2 Nombre de mots de 3 lettres de l'alphabet toutes différentes. *(Ordonné, sans répétition.)*

$\to$ nombre de triplets d'éléments distincts d'un ensemble à 26 éléments : $26 \times 25 \times 24 = 15\,600$.

Ex. 3 Nombre d'anagrammes du mot « MDR ». *(Ordonné, sans répétition, $k = n$.)*

$\to$ nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments : $3! = 6$.

Ex. 4 Nombre de façons de tirer simultanément 3 jetons parmi 6 jetons marqués de lettres différentes. *(Non ordonné.)*

$\to$ nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 6 : $\binom{6}{3} = 20$.