Combinatoire et dénombrement

Feuilles d'exercices et corrections

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Ce document regroupe l'ensemble des exercices du chapitre : activité de découverte, exercices de départ, exercices d'application, démonstration de la relation de Pascal et histoire des mathématiques, puis exercices de type bac.

Activité de découverte

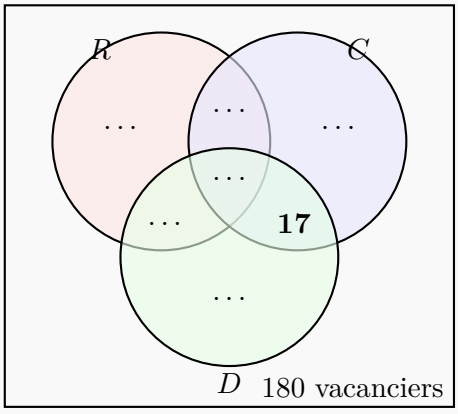
---

1 Un club de vacances

Exercice 1: Activité de découverte – Un club de vacances

Un club de vacances propose trois activités durant la semaine : randonnée, canoë et découverte culinaire. Parmi les 180 vacanciers, 70 se sont inscrits à la randonnée, 80 au canoë et 60 à la découverte culinaire.

1. Chaque vacancier peut choisir de faire de 0 à 3 activités durant ses vacances. Combien de programmes différents un vacancier peut-il construire ?
2. Pourquoi peut-on affirmer que certains vacanciers se sont inscrits à plusieurs activités ?
3. Pour résumer la situation, les organisateurs consignent les informations dans le diagramme ci-dessous, appelé **diagramme de Venn**. On peut y lire que 17 personnes sont inscrites à la découverte culinaire et au canoë mais pas à la randonnée.



   a) Compléter ce diagramme sachant que 25 personnes sont inscrites au canoë et à la randonnée mais pas à la découverte culinaire, et que personne n'est inscrit à la fois à la randonnée et à la découverte culinaire.
   b) Combien de personnes ne sont inscrites à aucune activité ?
4. On appelle **cardinal** d'un ensemble le nombre d'éléments de cet ensemble. On note D, C et R les ensembles des vacanciers inscrits respectivement à la découverte culinaire, au canoë et à la randonnée.
   À l'aide du diagramme complété, donner les cardinaux des ensembles R, C, D, $R \cup D$ et $C \cup D$.
5. On note $\text{Card}(R)$ le cardinal de l'ensemble R. Quelle relation obtient-on entre $\text{Card}(R)$, $\text{Card}(D)$ et $\text{Card}(R \cup D)$?

6. A-t-on une relation similaire entre $\text{Card}(C)$, $\text{Card}(D)$ et $\text{Card}(C \cup D)$? Justifier.
7. À la fin de la semaine, des prix sont décernés pour chacune des activités : pour chacune d'elles, l'organisation désigne le meilleur vacancier ou la meilleure vacancière et lui offre une récompense. On forme ainsi un triplet de vacanciers récompensés.

   Combien de triplets de récompensés peut-on former ? (On suppose qu'un vacancier peut être récompensé pour plusieurs activités différentes.)

On appelle **produit cartésien** des ensembles C, D et R l'ensemble des triplets formés à partir d'un élément de chacun de ces ensembles.

Bilan : le produit cartésien de deux ensembles non vides A et B est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ où $x \in A$ et $y \in B$. Combien de couples peut-on former en fonction de $\text{Card}(A)$ et de $\text{Card}(B)$?

Feuille 1 – Exercices de départ

---

2 Composer une équipe

Exercice 2: L'équipe de France de football

Le sélectionneur de l'équipe de France de football doit choisir les onze joueurs qui débuteront un match. Il a 23 joueurs à sa disposition.

1. Sans prendre en compte le poste de chaque joueur, combien d'équipes peut-il former ?
2. Parmi les 23 joueurs, on trouve trois gardiens, huit défenseurs, cinq milieux de terrain et sept attaquants. Sachant que l'équipe sera composée d'un gardien, de quatre défenseurs, de trois milieux de terrain et de trois attaquants, combien d'équipes le sélectionneur peut-il former avec ces nouvelles contraintes ?

3 Lancers de dé

Exercice 3: Un dé à six faces

On possède un dé à six faces, numérotées de 1 à 6.

1. On lance ce dé et on regarde le nombre du dessus.
   a. Combien cette expérience compte-t-elle d'issues ?
   b. Combien y a-t-il d'événements ?
2. On lance le dé six fois et on note à chaque lancer 1 si on obtient la face numérotée 1 et 0 dans les autres cas. On construit ainsi un 6-uplet de $\{0\,;1\}$.
   a. Combien y a-t-il d'issues possibles à cette expérience ?
   b. On considère l'événement E : « On a obtenu un nombre pair de fois le nombre 1. »
   Combien d'issues réalisent l'événement E ?

Feuille 2 – Exercices d'application

4 Pari hippique

Exercice 4: Le tiercé

Le tiercé est un pari hippique : le parieur doit pronostiquer les trois chevaux qui arriveront en tête à la fin d'une course de dix chevaux, dans l'ordre ou dans le désordre.

1. Combien de combinaisons de trois chevaux existe-t-il si on tient compte de l'ordre d'arrivée ?
2. Combien y en a-t-il si on ne tient pas compte de l'ordre d'arrivée ?

5 Mastermind

Exercice 5: Mastermind

Au Mastermind, un premier joueur entre un code en plaçant quatre pions de couleurs différentes parmi six couleurs possibles. Le second joueur doit alors deviner ce code. À chacune de ses propositions, le premier joueur donne le nombre de pions de couleurs bien placés ainsi que le nombre de pions dont la couleur figure dans le code mais qui ne sont pas au bon emplacement.
Par exemple, dans le cas ci-dessous, le premier joueur répondra qu'un pion est bien placé et que deux autres sont mal placés, sans préciser lesquels.

Code secret :

Proposition :


1 bien placé (rouge)
2 mal placés (vert et bleu)

1. Combien de codes secrets existe-t-il ?
2. Le second joueur fait un premier essai. Combien de possibilités reste-t-il si le premier joueur lui répond :
   a) que deux pions sont bien placés et que deux autres sont mal placés ?
   b) que deux pions sont bien placés et qu'un pion est mal placé ?
   c) qu'un pion est bien placé et qu'un autre est mal placé ?

Feuille 3 – Démonstration et histoire des mathématiques

6 Démonstration de la relation de Pascal

Exercice 6: Relation de Pascal

Soit A un ensemble à n éléments, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et a un élément de A. On considère un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

1. Combien existe-t-il de combinaisons de k éléments de A ?
2. Combien existe-t-il de combinaisons de k éléments de A qui contiennent l'élément a ?
3. Combien existe-t-il de combinaisons de k éléments de A qui ne contiennent pas l'élément a ?

4. En déduire la relation de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
5. Démontrer cette relation en utilisant la formule : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

7 La machine Enigma

Exercice 7: Histoire des mathématiques : la machine Enigma

Lors de la Seconde Guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour s'envoyer des messages chiffrés incompréhensibles pour leurs opposants.
Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers divers composants : en pressant une lettre sur le clavier, on faisait s'allumer une nouvelle lettre, qui était ajoutée au message codé. Le chiffrement d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages utilisés par les Allemands pour l'envoyer. Pour ne rien arranger aux affaires des Alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. Le premier élément de la machine est une série de trois rotors qui permettent de réaliser les premières connexions électriques. Ces rotors sont choisis parmi cinq modèles et l'ordre de positionnement dans la machine est important. Combien de configurations différentes ces rotors permettent-ils ?
2. Chaque rotor peut être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. Combien de positions différentes peut-on donner à l'ensemble des trois rotors choisis ?
3. La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Vingt lettres sont reliées deux à deux et six restent inchangées.
   a. Combien de manières différentes a-t-on de choisir six lettres inchangées parmi 26 ?
   b. Les vingt lettres restantes sont alors reliées deux à deux par un câble. Pour le réaliser, on choisit deux lettres parmi les vingt que l'on relie, puis deux nouvelles lettres parmi les dix-huit restantes et ainsi de suite. L'ordre de sélection des câbles n'étant pas important, combien a-t-on de câblages possibles ?
4. En déduire un ordre de grandeur du nombre de réglages possibles de la machine Enigma.

La machine Enigma est l'œuvre d'Arthur Scherbius, mort en 1929 avant de savoir quel usage l'armée allemande ferait de son invention. Le déchiffrage par les Alliés est l'œuvre de plusieurs milliers d'hommes et de femmes réunis à Bletchley Park, qui se sont appuyés sur le travail des services de renseignement polonais. Le mathématicien Alan Turing (1912–1954) a contribué à cet effort de guerre en signalant l'importance des mots fréquemment utilisés dans les missives ennemies.

Feuille 4 – Exercices de type bac

---

8 Bac Amérique du Sud 2025 (jour 2)

Exercice 8: Annale de bac – Amérique du Sud 2025, jour 2 (partie A)

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30\,;-29\,;-28\,;\ldots\,;-1\,;1\,;\ldots\,;28\,;29\,;30\}$. Il comporte 60 éléments.
On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c.

1. Combien de couples $(a\,;c)$ différents peut-on ainsi obtenir ?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2+2x+c=0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac<1$.
3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire $\overline{M}$ comporte 1740 issues.
4. Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

9 Bac Métropole juin 2026 (jour 1)

Exercice 9: Annale de bac – Métropole, 16 juin 2026 (extrait)

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant.
Titouan et Clotilde participent à un escape game. Ils se retrouvent dans une salle possédant deux portes de sortie, A et B, chacune protégée par un digicode équipé de 8 touches portant des symboles différents :

- le digicode de la porte A utilise un code de 3 symboles différents devant être saisis dans l'ordre ;
- celui de la porte B utilise un code de 4 symboles différents qui peuvent être saisis dans n'importe quel ordre.

N'étant pas parvenus à obtenir d'indices, ils décident de procéder au hasard à la saisie des codes. Clotilde choisit un code pour la porte A, et Titouan choisit un code pour la porte B. On considère que les choix des codes sont équiprobables.
Affirmation : Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

10 Bac Métropole juin 2026 (jour 2)

Exercice 10: Annale de bac – Métropole, 17 juin 2026 (extrait)

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant.
Un jeu sur le thème de la culture de la Pop est proposé à 10 personnes dont 4 sont des musiciens professionnels. Deux équipes de 5 joueurs s'affrontent. Elles sont chacune constituées de 2 musiciens professionnels et de 3 personnes qui ne le sont pas.
Affirmation : On peut former ainsi 120 équipes différentes.