Fiche de cours – Combinatoire et dénombrement

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

L'essentiel à connaître

1 Principes de base

Définition 1.1: Cardinal

Le **cardinal** $\mathrm{Card}(E)$ d'un ensemble fini E est son nombre d'éléments. **Dénombrer**, c'est déterminer un cardinal. Deux ensembles sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

Propriété 1.2: Principe additif

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont **deux à deux disjoints** : $\mathrm{Card}(E_1 \cup \cdots \cup E_p) = \mathrm{Card}(E_1) + \cdots + \mathrm{Card}(E_p)$.
Ensembles non disjoints : $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$ (diagramme de Venn).

Propriété 1.3: Principe multiplicatif

Le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(a_1 ; \ldots ; a_p)$ avec $a_i \in E_i$ (**l'ordre compte**) :

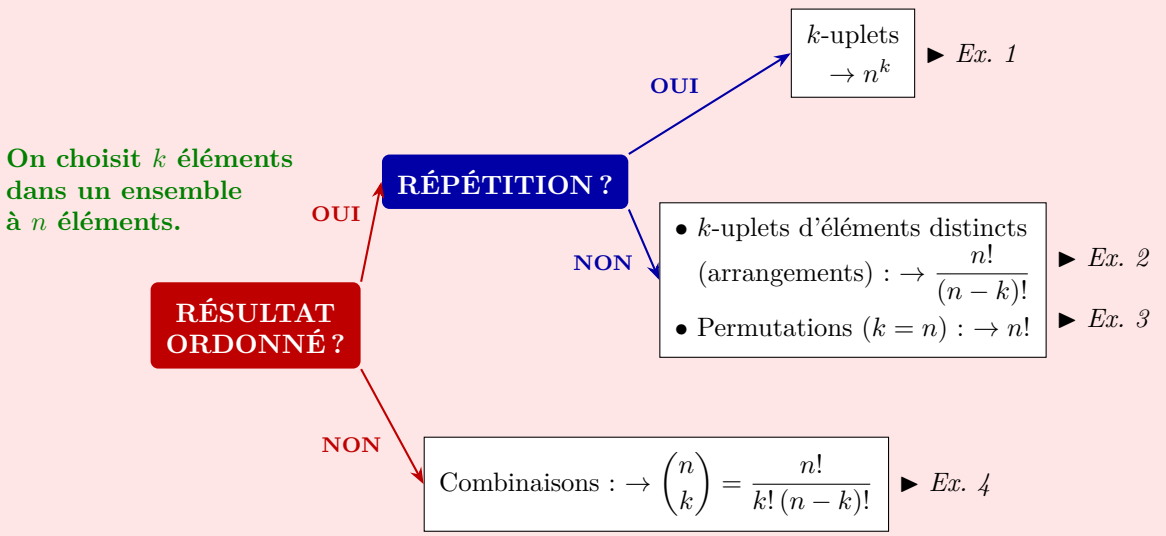
$$\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(E_p).$$

En pratique : des choix successifs indépendants se multiplient (arbre de choix).

2 Quel modèle choisir ?

Bilan

Pour résumer : k-uplet, permutation, combinaison... lequel choisir ?



Ex. 1 mots de 3 lettres : 26^3 **Ex. 2** mots de 3 lettres distinctes : $26 \times 25 \times 24$ **Ex. 3** anagrammes de « MDR » : 3! **Ex. 4** tirer simultanément 3 jetons parmi 6 : $\binom{6}{3}$.
Situations types : tirages successifs **avec remise** → k-uplets ; successifs **sans remise** → k-uplets d'éléments distincts ; **simultanés** → combinaisons.

Définition 2.1: Factorielle et permutations

$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \geqslant 1$, et $0! = 1$. On a $n! = n \times (n-1)!$.
Une **permutation** d'un ensemble à n éléments est une façon d'ordonner tous ses éléments : il y en a $n!$.

Propriété 2.2: Nombre de parties

Un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

3 Coefficients binomiaux

Propriété 3.1: Valeurs et propriétés de $\binom{n}{k}$

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
- **Symétrie :** $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
- **Relation de Pascal** $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- **Somme :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- **Mots et chemins :** il y a $\binom{n}{k}$ mots de n lettres contenant k lettres a et $n-k$ lettres b ; il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins « droite / haut » de $(0\,;0)$ à $(p\,;q)$.

Triangle de Pascal

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$6 + 4 = 10$: chaque case est la somme de la case au-dessus et de celle au-dessus à gauche.

Python

- `from math import comb, factorial`
- `comb(n, k)` renvoie $\binom{n}{k}$;
- `factorial(n)` renvoie $n!$;
- `random.shuffle(L)` mélange la liste `L` (permutation aléatoire).

Calculatrice : `nCr` pour $\binom{n}{k}$, `nPr` pour $\dfrac{n!}{(n-k)!}$, `!` pour la factorielle.

Bilan

- **Identifier l'objet à compter** : l'ordre compte-t-il ? Les répétitions sont-elles possibles ?
- **Découper en cas disjoints** et additionner (principe additif), ou **enchaîner les choix** et multiplier (principe multiplicatif).
- **« Au moins un »** : passer par le complémentaire (total − cas « aucun »).
- **Éléments côte à côte** : les regrouper en un bloc, puis permuter à l'intérieur du bloc.
- **Probabilités** : en situation d'équiprobabilité, $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.