

LIMITES DES FONCTIONS

(Chapitre 1/2)

I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :

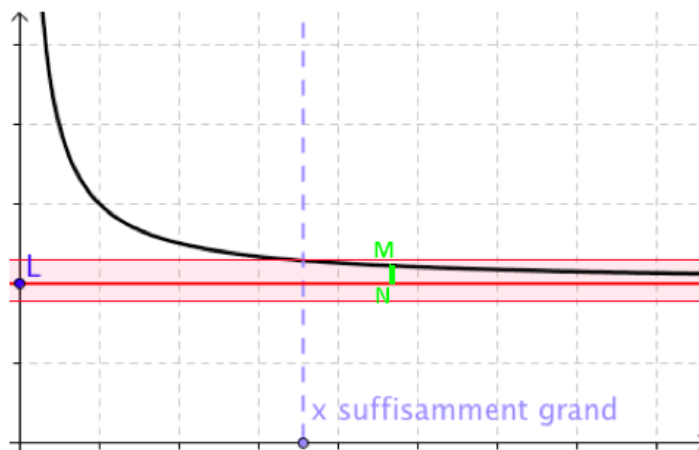
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.



Définition :

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

Définitions : - La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

- La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Remarque :

Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.
La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infiniIntuitivement :

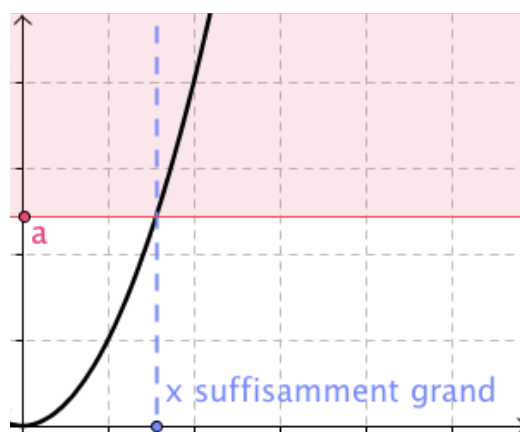
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

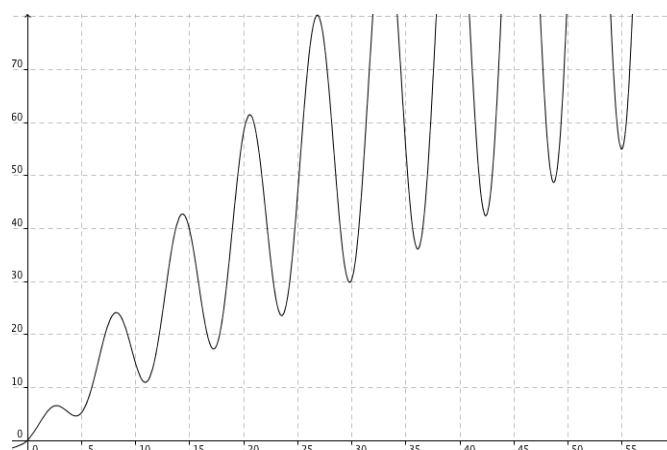


Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a ; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

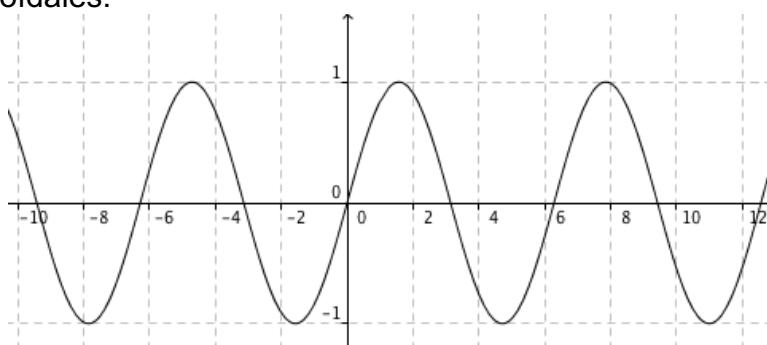
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty ; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement :

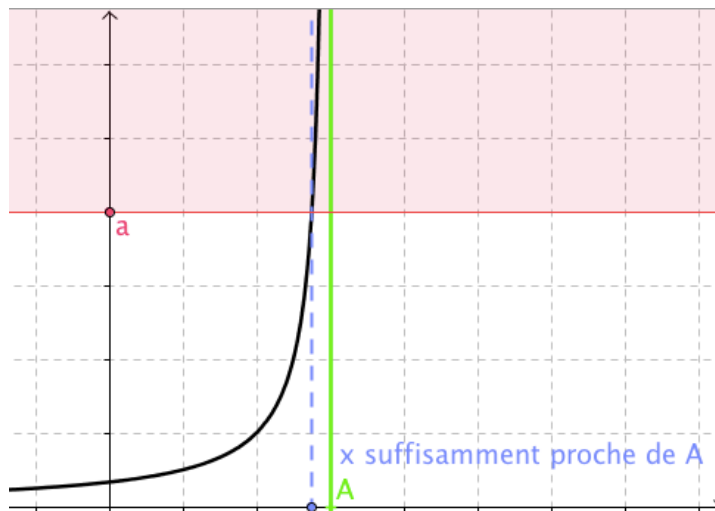
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A .

Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A .

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A .

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de A .



Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a ; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$.

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty ; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$.

Définition : La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f , si : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$.

Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$

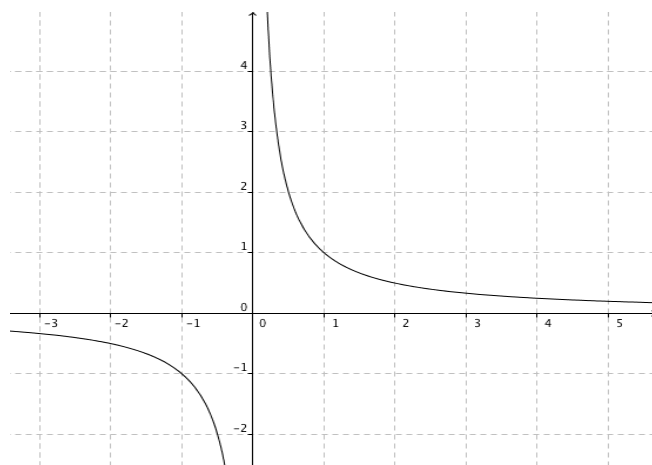
par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

- Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$



On parle de **limite à gauche de 0** et de **limite à droite de 0**.

III. Opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) =$	$L L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2)$?

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 + x^2) = +\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5)(3 + x^2) = -\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x}{x-3}$?

$$\lim_{x \rightarrow 3} 1 - 2x = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 = 0^+$$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x}{x-3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-2x}{x-3} = -\infty$

Remarque :

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Calculer : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$ 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$

$$1) \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

On reconnaît une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination (méthode de la factorisation par le monôme de plus haut degré) :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\bullet \text{ Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$$

$$\text{Soit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -\infty.$$

2) • En appliquant la méthode de la question 1) pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, cela nous conduit à une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$$

• Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$.

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 - \frac{5}{x^2} = 6$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{1}{3}$.

3) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination :

$$\frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}}$$

• Or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{2}{x^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - \frac{1}{x} = 4$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

Soit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = -\infty$.

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

Calculer : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

1) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

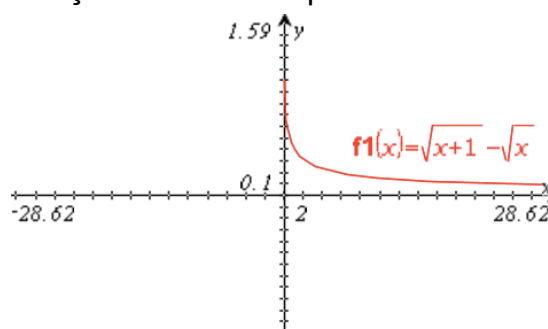
$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

• Par limite d'une somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$.

Et donc, par limite d'un quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$.

Soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.

On peut vérifier la pertinence du résultat en traçant la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.



2) • $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} - 2 = \sqrt{5-1} - 2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 5} x - 5 = 5 - 5 = 0$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} &= \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} \end{aligned}$$

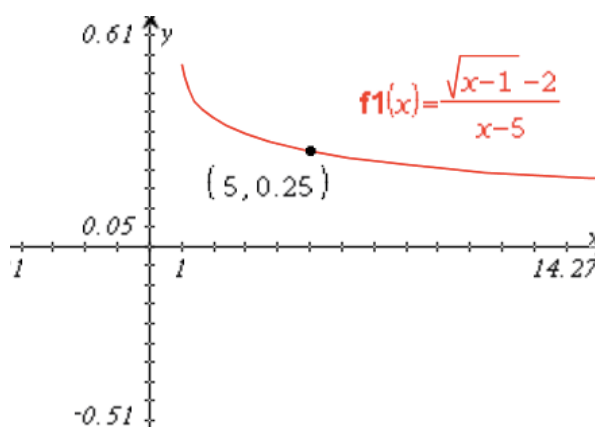
• Or $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{5-1} + 2 = 4$

Donc, par limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.

Soit : $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

En traçant à l'aide de la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, il est possible de vérifier la pertinence de la solution trouvée en plaçant le point de coordonnées (5 ; 0,25).

Attention cependant, la calculatrice ne fait pas nécessairement apparaître que la fonction f n'est pas définie en 5.



Méthode : Déterminer une asymptote

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty$ donc par limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

On prouve de même que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

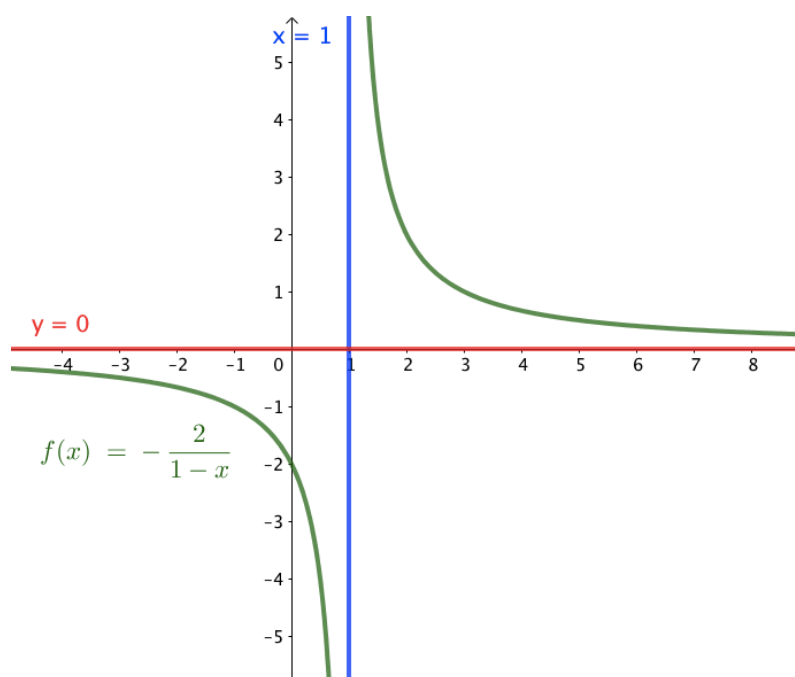
On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote **horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1-x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} 1-x = 0^-$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote **verticale** à la courbe représentative de f **à gauche de 1** et **à droite de 1**.

En traçant, à l'aide de la calculatrice, la courbe de la fonction f , il est possible de vérifier les résultats.



LIMITES DES FONCTIONS (Chapitre 2/2)

I. Limite d'une fonction composée

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Soit la fonction f définie sur $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$ par : $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$
Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$

Donc, comme limite de fonction composée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

On peut en effet poser $X = 2 - \frac{1}{x}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

II. Limites et comparaisons

1) Théorèmes de comparaisons

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a ; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x)$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (figure 1)
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (figure 2)
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ (figure 3)
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

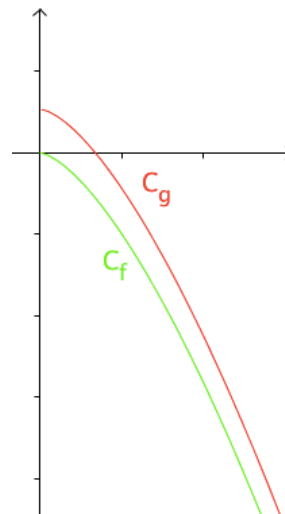
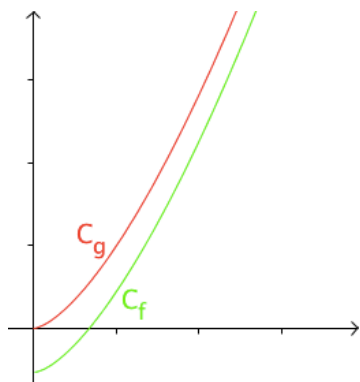


Figure 1

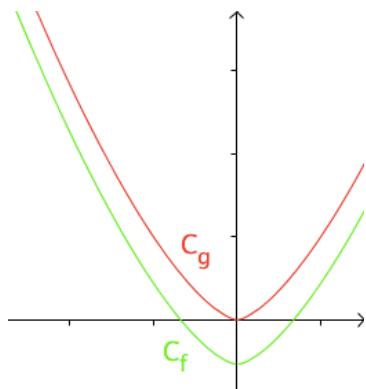


Figure 3

Figure 2

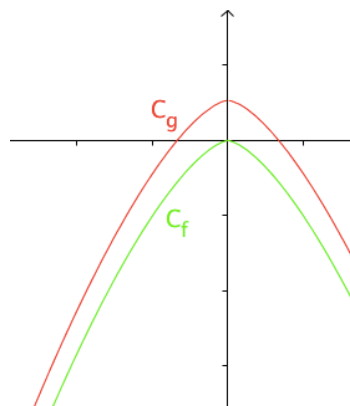


Figure 4

Démonstration dans le cas de la figure 1 :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m ; +\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) > m$.

Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.

Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) > m$.

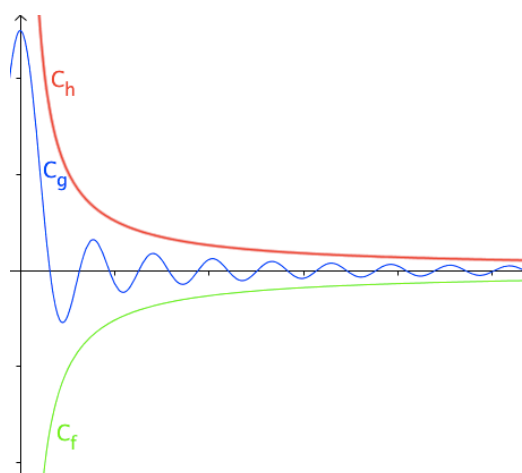
Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes : Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a ; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$.

Remarque : On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Calculer : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$

1) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

• Pour tout x , $-1 \leq \sin x$ donc : $x - 1 \leq x + \sin x$.

• Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$$

2) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

• Pour tout x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc : $-x \leq x \cos x \leq x$, car $x > 0$

Et donc :

$$-\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$-\frac{x}{x^2} \leq -\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2}$$

Soit : $-\frac{1}{x} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x}$

• Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} = 0$.

III. Fonction exponentielle

1) Limites aux bornes

Propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Démonstration au programme :

- La suite (e^n) est une suite géométrique de raison $e > 1$.

Donc, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$.

Si on prend un réel a quelconque (aussi grand que l'on veut), il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite dépassent a , soit : $e^{n_1} > a$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a également, pour tout $x > n_1$: $e^x > e^{n_1}$.

Donc, pour tout $x > n_1$, on a : $e^x > e^{n_1} > a$.

Ainsi, tout intervalle $]a ; +\infty[$ contient toutes les valeurs de e^x , dès que x est suffisamment grand.

Soit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X}$, en posant $X = -x$

Or, $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$, comme limite d'un quotient.

Soit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction contenant des exponentiels

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-3x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$

- Donc, comme limite de fonction composée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$

En effet, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, en posant $X = -3x$

- Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-3x} = +\infty$ comme limite d'une somme.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$

Donc, comme limite de fonction composée : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

2) Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ et pour tout entier n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration au programme du a :

- On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

On a : $f'(x) = e^x - x$

On calcule la dérivée de la dérivée f' :

$$(f'(x))' = e^x - 1.$$

Et on note $f''(x) = (f'(x))' = e^x - 1$ (Voir chapitre « Convexité »)

Pour tout x strictement positif, $f''(x) = e^x - 1 > 0$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$	1	
Signe de $f'(x)$		+
$f(x)$	1	

On en déduit que pour tout x strictement positif, $f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.

Soit encore : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans le cas général, on a :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, car n est positif.

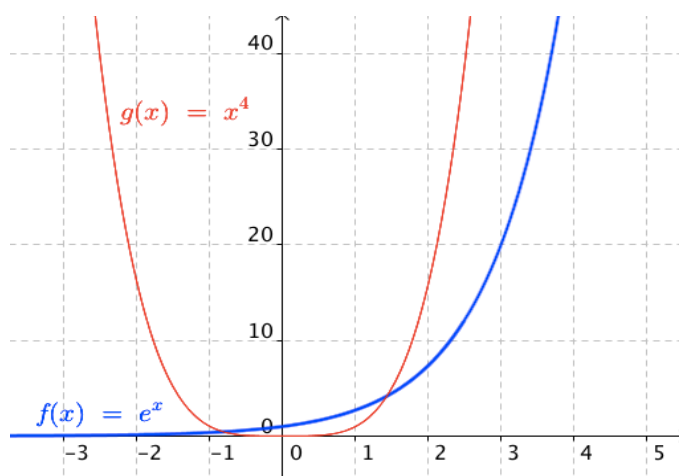
Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$, comme produit de n limites infinies.

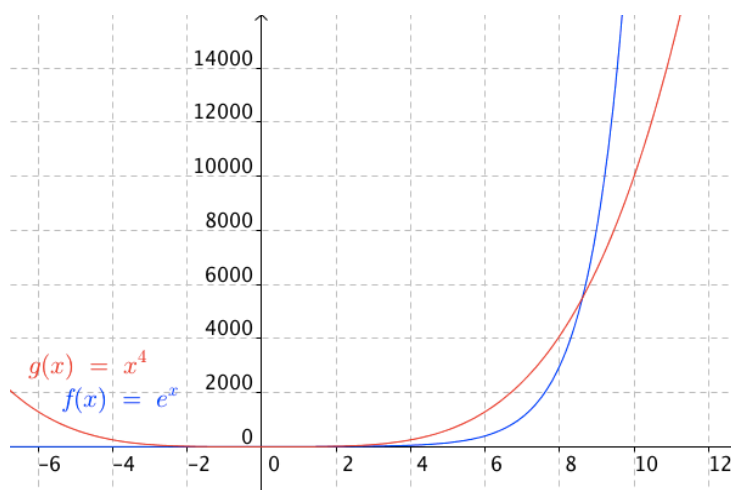
Soit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Exemple : Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction $x \mapsto x^4$ dans différentes fenêtres graphiques.

On constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction $x \mapsto x^4$ (voir graphique suivant).





Méthode : Calculer une limite par croissance comparée

Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$

Le dénominateur, par exemple, comprend une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ".
Levons l'indétermination :

$$\frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$$

Or, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, comme inverse de limites.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = 1$.