

Démonstration de la propriété suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ définie sur $I =]0; +\infty[$.

f est dérivable sur I car somme de fonctions dérivables sur I .

$$f'(x) = e^x - x \text{ .}$$

f' est dérivable sur I car somme de fonctions dérivables sur I .

$$f''(x) = e^x - 1$$

Or $\forall x \in I$, $e^x > 1$ donc $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur I .

$f'(0) = 1$ donc $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur I et comme $f(0) = 1$ on en déduit que $\forall x \in I$, $f(x) > 0$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$ (on exclut 0 car sinon n'allons pas pouvoir diviser par x),

$$f(x) > 0$$

$$e^x - \frac{x^2}{2} > 0$$

$$e^x > \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \text{ car } x \in]0; +\infty[$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.