

Exercices de départ convexité :

 **Exercice 9** Tracer dans un repère une courbe $\mathcal{C}$ pouvant représenter une fonction f définie sur $[-1 ; 5]$ telle que : f est convexe sur $[1 ; 5]$ et concave sur $[-1 ; 1]$; $f(1) = 2$; $f'(1) = -1$.

 **Exercice 10** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 6$.

1. Conjecturer la convexité de f à l'aide de la calculatrice.
2. Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Infirmer ou confirmer la conjecture émise à la première question.

 **Exercice 11** Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisses 1.
3. En déduire que, pour tout réel x , $e^x > x$.

 **Exercice 12** Les propositions suivantes sont fausses. Infirmer chacune d'elle à l'aide d'un contre-exemple éventuellement graphique.

1. Si une fonction n'est pas convexe sur un intervalle alors elle est concave sur cet intervalle.
2. Une fonction peut être convexe et concave sur un intervalle.
3. Si f est une fonction convexe sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, alors f est positive sur l'intervalle $[a; b]$

 **Exercice 13** Soit f une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + 1$. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

1. $f(0) > 0$.
2. $f(3) < -5$.
3. $f(-2) \geq 5$.

 **Exercice 15** Les fonctions cube sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont des nombres réels fixés, $a \neq 0$.

1. Déterminer $f''(x)$.
2. En déduire que la convexité d'une fonction cube est indépendante des valeurs de c et d .
3. Montrer que la courbe représentative d'une fonction cube admet toujours un point d'inflexion. Préciser son abscisse x_0 en fonction de a et b .
4. Discuter de la convexité d'une fonction cube suivant les valeurs de x (on distinguera les cas $a > 0$ et $a < 0$).

 **Exercice 16** Dans une entreprise, le coût total de production, en milliers d'euros, de x milliers d'objets est donné par : $C(x) = x^3 - 12x^2 + 72x + 100$ pour $0 \leq x \leq 10$.

On définit la fonction coût marginal C_m comme la dérivée de la fonction C .

On définit la fonction coût moyen C_M sur $]0; 10]$ par : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1.
 - a. Étudier les variations de la fonction C .
 - b. Tracer la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1cm pour 1 000 objets en abscisses et 1cm pour 50 000 € en ordonnées).
2.
 - a. On dit que les rendements marginaux sont décroissants lorsque le coût marginal C_m est croissant. Étudier les variations de la fonction C_m puis déterminer le nombre d'objets à produire à partir duquel les rendements marginaux deviennent décroissants.
 - b. A quoi cela correspond-il pour la fonction C ?
3. On dit que les rendements d'échelles sont décroissants lorsque le coût moyen C_M est croissant. On cherche à déterminer le nombre d'objets à produire à partir duquel les rendements d'échelles deviennent décroissants.
Pour éviter l'étude de la fonction C_M on utilise la méthode graphique suivante : le nombre recherché est l'abscisse du point de la courbe de C où la tangente passe par l'origine.
Déterminer ce nombre.
4. Représenter les courbes des fonctions C_m et C_M dans le même repère que celui de la fonction C et vérifier que la méthode graphique précédente est correcte.