

Correction exercice 2

1a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$u=x \text{ donc } u'=1$$

$$v=e^{-x} \text{ donc } v'=-e^{-x}$$

$$f'(x)=1+0+e^{-x}-xe^{-x}$$

$$f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f' est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$u=-x \text{ donc } u'=-1$$

$$v=e^{-x} \text{ donc } v'=-e^{-x}$$

$$f''(x)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}$$

$$f''(x)=-2e^{-x}+xe^{-x}$$

$$f''(x)=e^{-x}(-2+x)$$

1b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

De plus si $x-2 > 0$ alors $x > 2$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ d'après les produits de limites donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ d'après les croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$

et $f'(x) = 1 + e^{-2} - 2e^{-2} \approx 0,86$

Donc le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
e^{-x}	+		+
$x-2$	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+
f'	$+\infty$	0.86	1

1c) D'après le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$, le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ est d'environ 0,86, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

1d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ d'après les produits de limites donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ d'après les sommes de limites.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ d'après les croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ est donc le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

1e) On rappelle que la formule pour obtenir une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f'(x)(x-a) + f(a)$.

Donc ici une équation à la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

$$f'(0) = 1 + e^{-0} - 0e^0 = 2$$

$$f(0) = 0 + 1 + 0e^{-0} = 1$$

Donc $y = 2x + 1$

1f) Sur l'intervalle $]-\infty; 2[$ la fonction f est concave car sa dérivée seconde est négative sur cet intervalle.

Or une la courbe d'une fonction concave est située sous toutes ses tangentes.

Donc sur $]-\infty; 2[$ la courbe C_f est sous la tangente d'équation $y = 2x + 1$, autrement dit, pour tout $x \in]-\infty; 2[$, $f(x) \leq 2x + 1$.

2a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$

$$e^x = x(e^x + 1)$$

$$e^x = xe^x + x$$

$$1 = \frac{xe^x + x}{e^x}$$

$$\frac{xe^x}{e^x} + \frac{x}{e^x} = 1$$

$$x + xe^{-x} = 1$$

$$x + xe^{-x} + 1 = 2$$

Donc résoudre $f(x) = 2$ revient à résoudre $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$.

2b) h est dérivable sur $[0; 1]$ car c'est un quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle et de plus le dénominateur ne s'annule jamais sur $[0; 1]$.

$$u = e^x \text{ donc } u' = e^x$$

$$v = e^x + 1 \text{ donc } v' = e^x$$

$$h'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x)^2}{(e^x + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(e^x + 1 - e^x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Sur $[0; 1]$ le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs donc h est strictement croissante sur $[0; 1]$.

De plus $h(0) = \frac{1}{2}$ et $h(1) = \frac{e}{e+1} \approx 0,73$ le tableau de variation de h est le suivant :

x	0	1
h	0.5	$\frac{e}{e+1}$