

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer la dérivée seconde de f .
- Étudier le sens de variation de f' .
- En déduire que, pour tout réel x , $f'(x) > 0$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Donner une équation à la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
- En déduire que pour tout $x \leq 2$, on a : $f(x) \leq 2x + 1$.

On admet que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α .

- Prouver que, sur $\mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = 2$ équivaut à résoudre $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- En déduire que si $x \in [0; 1]$, alors : $0 \leq h(x) \leq 1$.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer la dérivée seconde de f .
- Étudier le sens de variation de f' .
- En déduire que, pour tout réel x , $f'(x) > 0$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Donner une équation à la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
- En déduire que pour tout $x \leq 2$, on a : $f(x) \leq 2x + 1$.

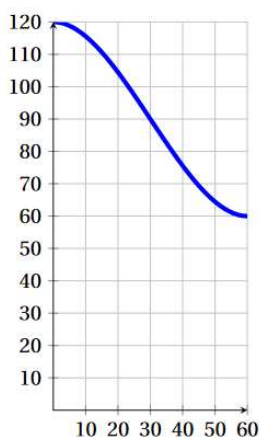
On admet que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α .

- Prouver que, sur $\mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = 2$ équivaut à résoudre $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- En déduire que si $x \in [0; 1]$, alors : $0 \leq h(x) \leq 1$.

 **Exercice 19** Une commune des Alpes demande à un ingénieur de modéliser le futur tremplin de saut à ski avec les contraintes suivantes :

- les tangentes au départ du tremplin et à l'arrivée sont horizontales;
- la fonction qui modélise le tremplin est définie sur $[0; 60]$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d réels.

- Déterminer la fonction dérivée f' sur $[0; 60]$
 - Déterminer les nombres dérivés de f en 0 et en 60
 - En déduire la valeur de c ainsi qu'une expression de b en fonction de a .
- Déterminer les images de 0 et 60 par f
 - Déduire de ce qui précède les valeurs de a, b et d ainsi que l'expression de $f(x)$.
- Étudier la convexité de la fonction f sur $[0; 60]$
 - Déterminer la longueur de la barre de renfort horizontale qui devra toucher le tremplin au point d'inflexion. A quelle hauteur devra-t-il être placée?



 **Exercice 19** Une commune des Alpes demande à un ingénieur de modéliser le futur tremplin de saut à ski avec les contraintes suivantes :

- les tangentes au départ du tremplin et à l'arrivée sont horizontales;
- la fonction qui modélise le tremplin est définie sur $[0; 60]$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d réels.

- Déterminer la fonction dérivée f' sur $[0; 60]$
 - Déterminer les nombres dérivés de f en 0 et en 60
 - En déduire la valeur de c ainsi qu'une expression de b en fonction de a .
- Déterminer les images de 0 et 60 par f
 - Déduire de ce qui précède les valeurs de a, b et d ainsi que l'expression de $f(x)$.
- Étudier la convexité de la fonction f sur $[0; 60]$
 - Déterminer la longueur de la barre de renfort horizontale qui devra toucher le tremplin au point d'inflexion. A quelle hauteur devra-t-il être placée?

