

DÉRIVATION

I. Rappels

1) Fonction dérivable

Définition : On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel L , tel que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
 L est appelé le **nombre dérivé** de f en a .

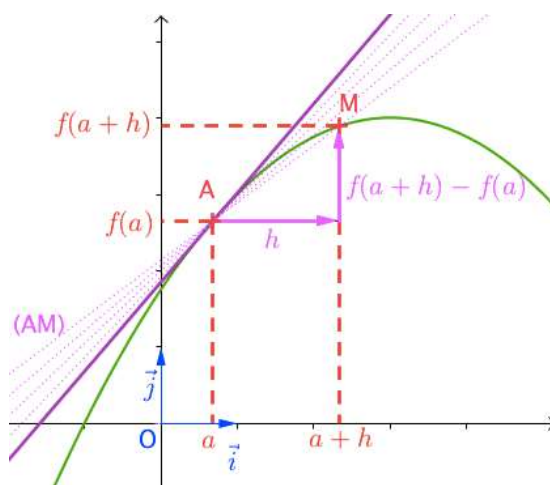
2) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

L est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L .



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :
 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$$f'(x) = 2x + 3 \text{ donc } f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$\text{Or, } f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$$

Donc son équation est de la forme : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit :

$$y = 7(x - 2) + 9 \text{ soit encore } y = 7x - 5$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

3) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx}, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{6x}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6e^{6x}$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$.

4) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$

$$f(x) = u(x)v(x) \text{ avec } u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5$$

$$v(x) = 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3 \\ &= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x \\ &= 18x^2 - 38x + 10 \end{aligned}$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$$

$$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$$

$$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

5) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

- Admis -

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.

Réolvons l'équation : $f'(x) \leq 0$

$$2x - 4 \leq 0$$

$$2x \leq 4$$

$$x \leq 2$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

II. Dérivées d'une fonction composée

1) Définition

Exemple :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$

La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par : $u(x) = x-3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x-3}$$

Définition : Soit une fonction u définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J . Soit une fonction v définie sur un intervalle K tel que $J \subset K$.
On appelle **fonction composée** de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par : $v \circ u(x) = v(u(x))$.

Méthode : Composer deux fonctions

1) On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de x .

2) Même question avec $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$.

1) On a : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$u \circ v(x) = u(v(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) On a : $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$$

$$u \circ v(x) = u(v(x)) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{x}{x+1}$$

2) Formule de dérivation d'une fonction composée

Propriété : Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J .

Soit une fonction v définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$.

La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ ou encore $f' = v' \circ u \times u'$

Admis

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée (cas général)

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$

Donc : $f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

$$= e^{x^2+1} \times 2x$$

$$= 2xe^{x^2+1}$$

3) Cas particuliers de fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$\mathbb{R}$	$u'e^u$

Démonstrations :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$

Donc $(\sqrt{u(x)})' = v'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Soit $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

- $(u(x))^n = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$

Donc $((u(x))^n)' = v'(u(x)) \times u'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$, car $v'(x) = nx^{n-1}$

Soit $((u(x))^n)' = nu'(x)(u(x))^{n-1}$

- Démonstration analogue pour « e^u ».

Méthode : Déterminer la dérivée de fonctions composées (cas particuliers)

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1} \quad \text{b) } g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4 \quad \text{c) } h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{a) On pose : } f(x) = \sqrt{u(x)} \text{ avec } u(x) = 3x^2 + 4x - 1 \rightarrow u'(x) = 6x + 4$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}} \\ &= \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}} \end{aligned}$$

$$\text{b) On pose : } g(x) = (u(x))^4 \text{ avec } u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } g'(x) &= 4u'(x)(u(x))^3 \\ &= 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3 \end{aligned}$$

$$\text{c) On pose : } h(x) = 2e^{u(x)} \text{ avec } u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } h'(x) &= 2u'(x)e^{u(x)} \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

4) Étude d'une fonction composée

Méthode : Étudier une fonction composée (1)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$

On note C sa courbe représentative dans un repère.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C .
- 3) Étudier les variations de f .
- 4) Tracer les asymptotes à la courbe C puis la courbe C .

1) La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty[$ donc la fonction f est définie pour $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$2x$			O	
$3x+1$		O		
$\frac{2x}{3x+1}$				

Donc la fonction f est définie sur $]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup [0; +\infty[$.

2) - Recherche des limites à l'infini :

La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.

Levons l'indétermination :

$$\frac{2x}{3x+1} = \frac{2x}{x(3 + \frac{1}{x})} = \frac{2}{3 + \frac{1}{x}}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Et donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3}$$

On en déduit, comme limite de fonction composée, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On démontre de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ainsi, la droite d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ est asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Recherche de la limite en $-\frac{1}{3}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} 3x+1 = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} 2x = -\frac{2}{3} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \frac{2x}{3x+1} = +\infty.$$

Donc, comme limite de fonction composée, on a : $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \sqrt{\frac{2x}{3x+1}} = +\infty$.

En effet : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, en considérant que $X = \frac{2x}{3x+1}$.

Ainsi la droite d'équation $x = -\frac{1}{3}$ est asymptote verticale à la courbe C .

$$3) \text{ On pose : } u(x) = \frac{2x}{3x+1}$$

$$u'(x) = \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(3x+1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{2}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$$

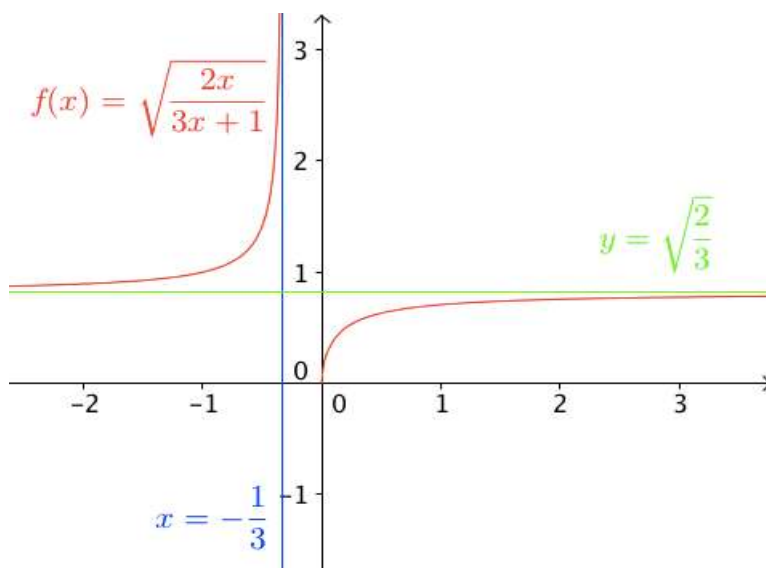
Et donc $f'(x) > 0$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	////////////////////		+
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\nearrow$ $+\infty$	////////////////////		$0 \nearrow \sqrt{\frac{2}{3}}$

A noter : On met une double barre pour la dérivée en 0. En effet, si $x = 0$, le dénominateur de la dérivée s'annulerait. La fonction dérivée f' n'est pas définie en 0.

5)



Méthode : Étudier une fonction composée (2)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

- Étudier les limites de f à l'infini.
- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Tracer la courbe représentative de la fonction f .

a) - $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2} = +\infty$, donc comme limite d'une fonction composée : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$.

En effet, $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ en posant $X = -\frac{x}{2}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\frac{x}{2}} = -\infty$, comme limite d'un produit.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

Levons l'indétermination :

$$x e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 2 \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}$$

Par croissance comparée, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$.

En effet, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, en considérant que $X = \frac{x}{2}$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$, comme inverse de limite.

Et donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$

Soit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{x}{2}} = 0$.

b) On a :

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\text{En effet : } \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

c) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.

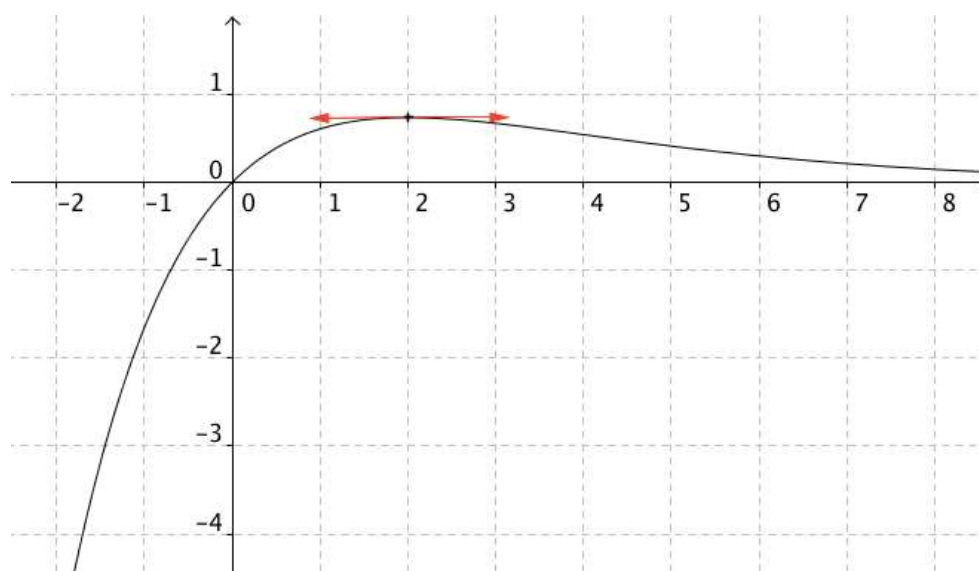
f' est donc positive sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ et négative sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

En effet : $f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$

d)



CONVEXITÉ

I. Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I .

On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' et on note :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

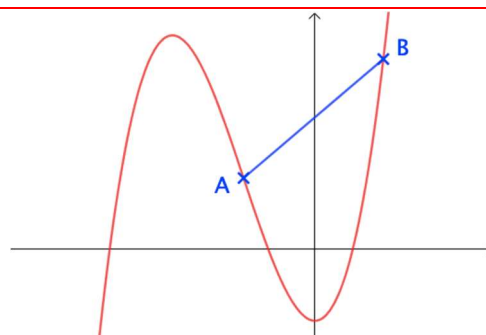
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 9x^2 - 10x$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = (f'(x))' = 18x - 10$.

II. Fonction convexe et fonction concave

1) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

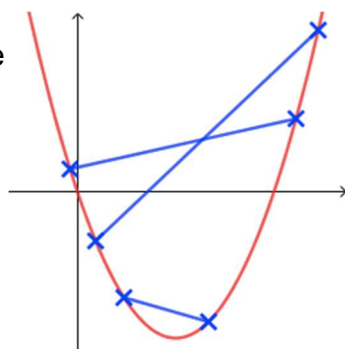


Définitions : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

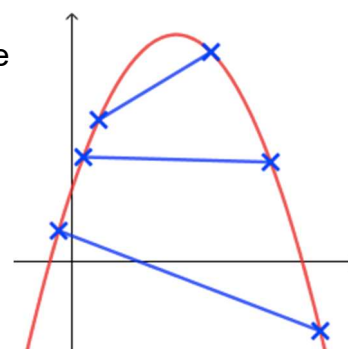
- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

Fonction convexe



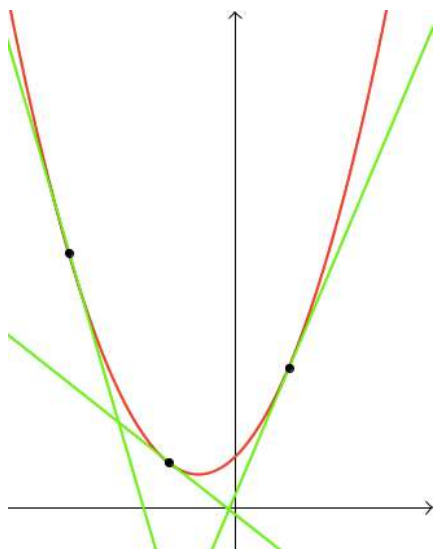
Fonction concave



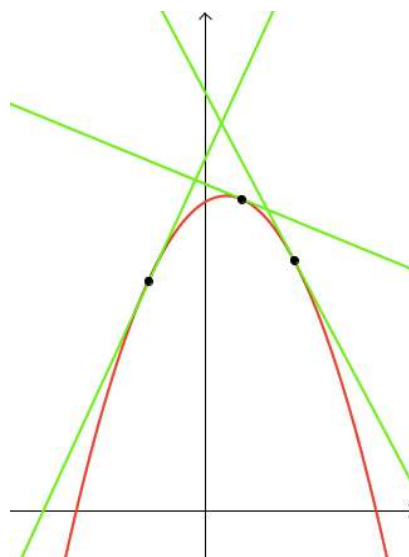
2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

3) Propriétés

Propriétés :

- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0 ; +\infty[$.

- Admis -

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Dire que la fonction f est convexe sur I , revient à dire que sa dérivée f' est croissante sur I , soit :

$$f''(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

- Dire que la fonction f est concave sur I , revient à dire que sa dérivée f' est décroissante sur I , soit :

$$f''(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

Démonstration au programme :

- Démontrons que f est convexe, si f' est croissante :

On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :

$$g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a).$$

$$\text{Alors : } g'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Or f' est croissante sur I , donc g' est également croissante.

De plus, $g'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.

On peut donc compléter le tableau de variations de g .

x	a
$g'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$g(x)$	$\swarrow \quad \searrow$ 0

$$\text{En effet : } g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$$

Donc $g(x) \geq 0$ sur I .

$$\text{Soit } f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I .

- Démonstration analogue pour prouver que f est concave, si f' est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

Étudier la convexité de la fonction f .

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2 - 18x$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule pour $x = 9$.

Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$.

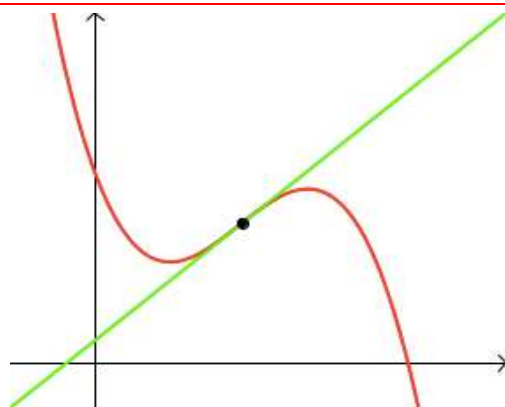
Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $]-\infty ; 9]$ et f est convexe sur $[9 ; +\infty[$.

III. Point d'inflexion

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.



Remarque importante :

Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :

On considère la fonction cube $x \mapsto x^3$.

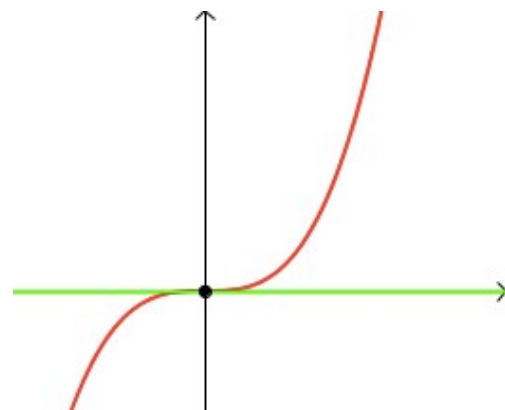
La tangente au point $O(0,0)$ est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.

Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.



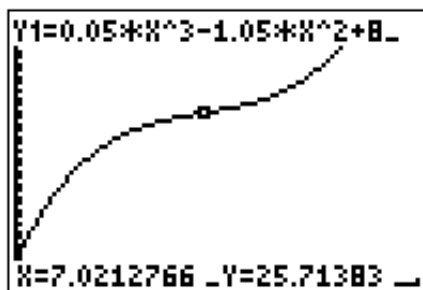
Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par : $C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$.

- 1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C . En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
- 2) Démontrer ces résultats.
- 3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

- 1) La fonction semble concave sur l'intervalle $[0 ; 7]$ et convexe sur l'intervalle $[7 ; 10]$. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.



2) $C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$

Donc : $C'(x) = 0,15x^2 - 2,1x + 8$

Et : $C''(x) = 0,3x - 2,1$

Or, $0,3x - 2,1 = 0$ pour $x = 7$.

On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0	7	10
$C''(x)$	-	0	+
$C'(x)$			
Convexité de C	concave		convexe

$$C(7) = 25,7$$

Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication C s'accélère. Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.

a) Étudier la convexité de la fonction f .

b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en -1 .

c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 6x - 4$ qui s'annule pour $x = \frac{2}{3}$.

Pour tout $x \leq \frac{2}{3}$: $f''(x) \leq 0$.

Pour tout $x \geq \frac{2}{3}$: $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $]-\infty ; \frac{2}{3}]$ et f est convexe sur $[\frac{2}{3} ; +\infty[$.

b) L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en -1 est de la forme :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

Or, $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) = 7$ et $f(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 = -3$

Donc, l'équation de la tangente en -1 est : $y = 7(x + 1) - 3$

Soit : $y = 7x + 4$

c) f est concave sur $]-\infty ; \frac{2}{3}]$ donc sur cet intervalle, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes.

Soit, en particulier, la courbe de f est située en dessous de la tangente en -1 .

On a ainsi, $f(x) \leq 7x + 4$ sur $]-\infty ; \frac{2}{3}]$.

Soit $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$ sur $]-\infty ; \frac{2}{3}]$ et donc en particulier pour tout x négatif.

