

Correction travail de groupe

EXERCICE 1

5 points

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.

On sait que :

- 20 % des machines sont sous garantie;
- 0,2 % des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie;
- 8,2 % des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.

On considère les événements suivants :

- G : « la machine est sous garantie »;
- D : « la machine est défectueuse »;
- $\bar{G}$ et $\bar{D}$ désignent respectivement les événements contraires de G et D .

1. La probabilité $p_G(D)$ de l'événement D sachant que G est réalisé est égale à :

- a. 0,002 b. 0,01 c. 0,024 d. 0,2

$$\left\| \begin{array}{l} 20 \% \text{ des machines sont sous garantie donc } p(G) = 0,2. \\ 0,2 \% \text{ des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie donc } p(G \cap D) = 0,002. \\ p_G(D) = \frac{p(G \cap D)}{p(G)} = \frac{0,002}{0,2} = 0,01 \end{array} \right. \quad \text{Réponse b.}$$

2. La probabilité $p(\bar{G} \cap D)$ est égale à :

- a. 0,01 b. 0,08 c. 0,1 d. 0,21

$$\left\| \begin{array}{l} 8,2 \% \text{ des machines sont défectueuses donc } p(D) = 0,082. \\ \text{D'après la formule des probabilités totales : } p(D) = p(G \cap D) + p(\bar{G} \cap D). \text{ Donc :} \\ p(\bar{G} \cap D) = p(D) - p(G \cap D) = 0,082 - 0,002 = 0,08 \end{array} \right. \quad \text{Réponse b.}$$

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

- a. 0,01 b. 0,024 c. 0,082 d. 0,1

$$\left\| \text{On cherche : } p_D(G) = \frac{p(G \cap D)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,082} \approx 0,024 \quad \text{Réponse b.} \right.$$

Pour les questions 4 et 5, on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul.

On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,082$.

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.

La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

a. 0,136

b. 0,789

c. 0,864

d. 0,924

$$\parallel p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) \approx 1 - 0,2114 \approx 0,789$$

Réponse b.

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à 0,4.

La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5

b. 6

c. 10

d. 11

Si toutes les machines fonctionnent, le nombre de machines défectueuses est 0 ; donc on cherche le plus grand n tel que $p(X = 0) > 0,4$.

$$p(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,082^0 \times (1 - 0,082)^n = 0,918^n$$

$$p(X = 0) > 0,4 \iff 0,918^n > 0,4 \iff \ln(0,918^n) > \ln(0,4)$$

$$\iff n \times \ln(0,918) > \ln(0,4) \iff n < \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)}$$

$$\frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)} \approx 10,71 \text{ donc le plus grand entier } n \text{ inférieur à } \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)} \text{ est } 10.$$

Réponse c.