

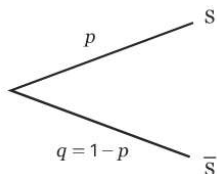
Cours probabilités : épreuve de bernoulli

A Épreuve de Bernoulli

Définition

Soit p un nombre réel appartenant à $[0 ; 1]$.

On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire n'admettant que deux issues, appelées généralement **succès** S et **échec** $\bar{S}$ et de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.



Remarque

Les termes « succès » et « échec » ne sont porteurs d'aucune valeur. Ils désignent simplement, de manière générique, les deux issues possibles. Le choix de ces termes est historiquement issu de la théorie des jeux.

Exemples

- Lancer une pièce de monnaie équilibrée et savoir si pile est obtenu est une épreuve de Bernoulli de succès S « Pile a été obtenu. » dont la probabilité est $p = 0,5$. L'échec $\bar{S}$ est « Face a été obtenu. ».
- Interroger une personne dans la rue en France et lui demander si elle est gauchère est une épreuve de Bernoulli de succès S « La personne est gauchère. » dont la probabilité est $p \approx 0,13$.

B Loi de Bernoulli

Définition

On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p .

Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0; 1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.

On dit alors que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Autrement dit, on a $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant.

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Remarque

La loi de Bernoulli permet de démontrer plusieurs résultats concernant les lois binomiales.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

L'espérance mathématique de X est $E(X) = p$.

La variance de X est $V(X) = p(1 - p)$.

Remarque

On a alors $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Démonstration

L'espérance $E(X)$ de X vaut : $E(X) = P(X = 1) \times 1 + P(X = 0) \times 0$

$$= p \times 1 + (1 - p) \times 0$$

$$= p.$$

La variance $V(X)$ de X vaut : $V(X) = P(X = 1) \times (1 - E(X))^2 + P(X = 0) \times (0 - E(X))^2$

$$= p \times (1 - p)^2 + (1 - p) \times (0 - p)^2$$

$$= p(1 - p)^2 + p^2(1 - p)$$

$$= p(1 - p)(1 - p + p)$$

$$= p(1 - p).$$

Rappel

$$E(X) = \sum_{k=1}^n p_k \times x_k \text{ et } V(X) = \sum_{k=1}^n p_k (x_k - E(X))^2$$

où $p_k = P(X = k)$.

c Schéma de Bernoulli

Définition

Soit n un nombre entier naturel non nul. Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

Remarque

Les conditions identiques et indépendantes sont essentielles et doivent être vérifiées dans chaque situation.

Exemple

On considère une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher. On prélève une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne. On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues. Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès S « La boule est bleue. » dont la probabilité est $\frac{2}{3}$. Comme les dix tirages se font avec remise, les tirages sont identiques et indépendants : on a bien un schéma de Bernoulli.

Remarque

Il peut être facile de concevoir mentalement l'arbre de probabilité associé à un schéma de Bernoulli, mais il n'est pas toujours facile de le tracer.

Loi binomiale

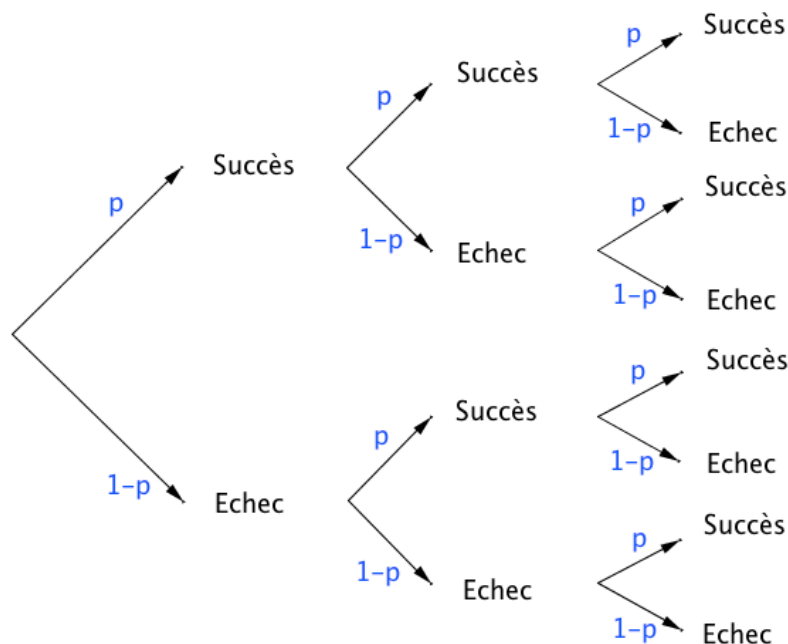
Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Une **loi binomiale** est une loi de probabilité définie sur l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n\}$ qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque : n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n ; p)$.

Exemple :

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p .
 X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

- $P(X = 3) = p^3$.

En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité égale à $p \times p \times p$.

- $X = 2$ correspond aux suites d'issues suivantes :
 (Succès ; Succès ; Echec)

(Succès ; Échec ; Succès)
 (Échec ; Succès ; Succès)
 Donc $P(X = 2) = 3 p^2 (1 - p)$

3) Expression de la loi binomiale à l'aide des coefficients binomiaux

Exemple :

Dans l'arbre précédent, combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ? On dit aussi : Combien y existe-t-il de combinaisons de 2 parmi 3 ?

(Succès ; Succès ; Echec)
 (Succès ; Echec ; Succès)
 (Echec ; Succès ; Succès)

Il existe donc trois combinaisons de 2 parmi 3 et on note : $\binom{3}{2} = 3$.

Définition : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$

On appelle **coefficient binomial** ou **combinaison de k parmi n** , le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Propriété : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, la loi de probabilité de X est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Démonstration au programme :

Un chemin comportant k succès (de probabilité p) comporte $n - k$ échecs (de probabilité $1 - p$). Ainsi sa probabilité est égale à $p^k (1 - p)^{n-k}$.

Le nombre de chemins menant à k succès est égal à $\binom{n}{k}$.

Donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Méthode : Calculer les probabilités d'une loi binomiale

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

- 1) Prouver que X suit une loi binomiale.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

1) On répète 4 fois une expérience à deux issues : boules gagnantes (5 issues) ; boules perdantes (7 issues).

Le **succès** est d'obtenir une boule gagnante.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{5}{12}$.

Les paramètres de la loi binomiale sont donc : $n = 4$ et $p = \frac{5}{12}$.

$$\begin{aligned} 2) P(X = k) &= \binom{4}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^k \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{4-k} \\ &= \binom{4}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^k \left(\frac{7}{12}\right)^{4-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) P(X = 3) &= \binom{4}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^{4-3} \\ &= \binom{4}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \times \frac{7}{12} \\ &= \binom{4}{3} \times \frac{125}{1728} \times \frac{7}{12} \\ &= \binom{4}{3} \times \frac{875}{20736} \end{aligned}$$

On détermine la valeur de la combinaison $\binom{4}{3}$ à l'aide du triangle de Pascal.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

On a donc $\binom{4}{3} = 4$, et donc :

$$P(X = 3) = 4 \times \frac{875}{20736} = \frac{875}{5184} \approx 0,17.$$

Méthode : Chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à ou supérieure à une valeur donnée

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 personnes.

Soit X est la variable aléatoire qui compte le nombre k de personnes qui ont voté pour le candidat A.

- 1) Déterminer des réels a et b tels que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$
- 2) Donner une interprétation du résultat précédent.

1) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,55$.

Avec le tableur, il est possible d'obtenir la loi de probabilité de X .

Avec la loi binomiale $B(50; 0,55)$:

Pour calculer $P(X = 20)$, il faut saisir : `=LOI.BINOMIALE(20;50;0,55;0)`

Pour calculer $P(X \leq 20)$, il faut saisir : `=LOI.BINOMIALE(20;50;0,55;1)`

The screenshot shows a spreadsheet with the formula `=LOI.BINOMIALE(A2;50;0,55;1)` in cell C2. Below it is a table with columns A, B, and C. Column A contains values of k (0 to 4), column B contains P(X=k), and column C contains P(X≤k). The values for P(X≤k) are 4,6E-018, 2,8E-016, 8,7E-015, 1,7E-013, and 2,5E-012.

	A	B	C	D	E
1	k	P(X=k)	P(X≤k)		
2	0	4,6E-018	4,6E-018		
3	1	2,8E-016	2,8E-016		
4	2	8,4E-015	8,7E-015		
5	3	1,6E-013	1,7E-013		
6	4	2,4E-012	2,5E-012		

On obtient ainsi :

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
P(X=k)	0,001	0,003	0,006	0,012	0,021	0,034	0,05	0,069	0,087	0,102	0,112

k	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P(X=k)	0,112	0,104	0,089	0,07	0,051	0,034	0,021	0,012	0,006	0,003	0,001

Pour $k < 17$ et $k > 38$, les probabilités sont inférieures à 10^{-3} et peuvent être considérées comme négligeables.

On obtient également le tableau des probabilités cumulées :

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
P(X≤k)	0,002	0,005	0,01	0,023	0,044	0,077	0,127	0,196	0,283	0,386	0,498

K	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P(X≤k)	0,61	0,713	0,802	0,872	0,923	0,957	0,978	0,989	0,995	0,998	0,999

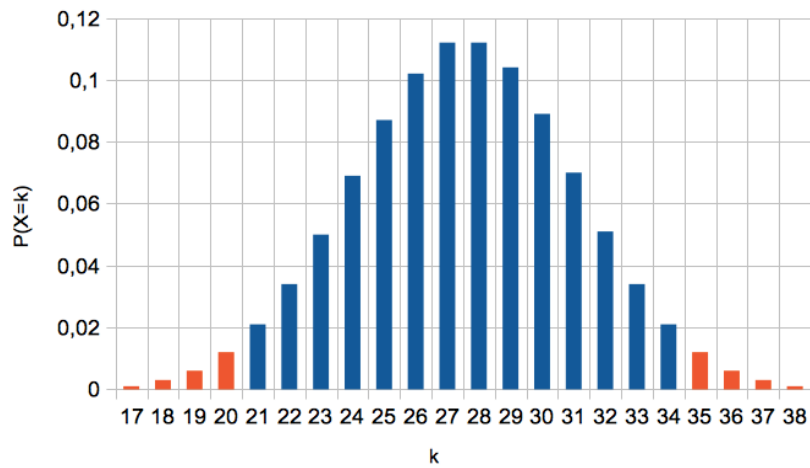
On cherche a et b tel que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$.

On commence par déterminer a le plus petit possible, tel que : $P(X \leq a) > 0,025$.

On lit : $a = 21$.

On détermine ensuite b , le plus petit possible, tel que : $P(X \leq b) \geq 0,975$.

On lit : $b = 34$.



Ainsi : $P(21 \leq X \leq 34) \geq 0,95$

2) Or, $\frac{21}{50} = 42\%$ et $\frac{34}{50} = 68\%$.

Pour un échantillon de 50 personnes, il y a au moins 95% de chance qu'il y ait entre 42 % et 68 % des électeurs qui votent pour le candidat A.

A noter : L'intervalle $[0,42 ; 0,68]$ s'appelle *intervalle de fluctuation au seuil de 95 %*.