

1 Somme de deux variables aléatoires

1.1 Définition

Définition 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires associées à une même expérience d'univers fini Ω et a un réel.

$X + Y$ et aX sont deux variables aléatoires définies sur Ω qui prennent comme valeur pour un événement donné respectivement : la somme des valeurs de X et Y et le produit de a par X .

Exemple : On lance deux dés, l'un tétraédrique numéroté de 1 à 4 et l'autre cubique numéroté de 1 à 6. On appelle X et Y les variables aléatoires associées respectivement aux résultats du dé tétraédrique et du dé cubique.

- $X + Y$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs de 2 à 10.
- $2X$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs 2, 4, 6, 8.

Remarque : On peut généraliser la somme de variable aléatoires à n variables. Par exemple : on lance 3 dés cubiques de couleurs différentes et l'on note X , Y et Z les résultats des dés de chaque couleur. On peut considérer la variable $X + Y + Z$ qui prend les valeurs de 3 à 18.

1.2 Linéarité de l'espérance et additivité de la variance

Théorème 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires d'un univers Ω et $a \in \mathbb{R}$:

- **Linéarité de l'espérance :** $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$

Si les variables X et Y sont indépendantes :

- **Additivité de la variance :** $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $V(aX) = a^2V(X)$

Remarque : On considère l'indépendance des variables au sens intuitif du terme c'est à dire que le résultat de X n'influe pas sur le résultat de Y comme dans le lancement de deux dés.

Exemple : De l'exemple précédent, on a :

- $E(X) = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 2,5$ et $E(Y) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$.

Donc $E(X + Y) = 2,5 + 3,5 = 6$ et $E(2X) = 2 \times 2,5 = 5$.

La moyenne de la somme des résultats est 6 sur un grand nombre de lancers.

- $V(X) = \frac{1}{4}(1 + 4 + 9 + 16) - 2,5^2 = 1,25$

$$V(Y) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - 3,5^2 = \frac{35}{12} \approx 2,92$$

Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y) \approx 4,17$ et $V(2X) = 4 \times 1,25 = 5$

Remarque : On peut généraliser ces résultats à la somme de n variables.

2 Somme de variables identiques et indépendantes

2.1 Décomposition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

Théorème 2 : Soit n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

La variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration : Soit les variables X_i suivant une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ qui prend la valeur 1 pour un succès avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme les variables X_i sont indépendantes, leur somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ prendra comme valeur le nombre de succès pour n expériences de Bernoulli, donc $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple : Soit X_i suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0, 13)$ pour $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$, alors $S_{10} = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0, 13)$.

Théorème 3 : Toute variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut se décomposer en une somme de n variables indépendantes S_n .

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ où X_i avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ suit une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Remarque : Ce théorème permet de démontrer l'expression de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

En effet si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on peut décomposer X en somme de n variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ d'espérance p et de variance $p(1 - p)$.

- $E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \stackrel{\text{linéarité}}{=} \underbrace{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}_{n \text{ variables suivant } \mathcal{B}(p)} = np$
- $V(X) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \stackrel{\text{additivité}}{=} \underbrace{V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)}_{n \text{ variables indépendantes suivant } \mathcal{B}(p)} = np(1 - p)$

Exemple : Soit X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 0, 3)$ alors, on peut décomposer X en somme de 5 variables suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0, 3)$.

2.2 Échantillon d'une variable aléatoire

Définition 2 : Soit une variable X suivant une loi de probabilité.

Une liste de variables indépendantes $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suivant cette même loi est appelée échantillon de taille n associé à X .

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$, on a alors :

$$E(S_n) = n E(X) , \quad E(M_n) = E(X) \quad \text{et} \quad V(S_n) = n V(X) , \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

Remarque : Plus la taille n de l'échantillon est grand plus la variance de M_n est petite donc plus la valeur de M_n se rapproche de l'espérance de X .

Exemple : Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donné par le tableau suivant.

On considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la loi suivie par X et la variable aléatoire moyenne M_n

x_i	-10	5	20
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{5}$

Déterminer la taille de l'échantillon n à partir de laquelle la variance de M_n devient inférieure à 0,05.

On calcule l'espérance et la variance de X :

- $E(X) = \frac{1}{20}(-50 + 55 + 80) = \frac{85}{20} = \frac{17}{4}$
- $V(X) = \frac{1}{20}(500 + 275 + 1600) - \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{475}{4} - \frac{289}{16} = \frac{1611}{16} \approx 100,7$

$$V(M_n) < 0,05 \Leftrightarrow \frac{V(X)}{n} < 0,05 \Leftrightarrow n > \frac{V(X)}{0,05} \approx 2\,014$$

À partir d'un échantillon de 2 014 variables, la variance de M_n est inférieure à 0,05.