

Exercice 4

7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Fonction exponentielle - Fonction logarithme - Suites

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0;1]$ par : $f(x) = e^{-x} + \ln(x)$.

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0;1]$. On note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0;1]$, on a : $f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$.

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0;1]$, on a $xe^{-x} < 1$.
En déduire le tableau de variation de f sur $]0;1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel L appartenant à $]0;1]$ tel que $f(L) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

- 1.a. Calculer a_1 et b_1 . On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- 1.b. On considère ci-dessous la fonction termes écrite en langage Python.

```
def termes(n):
    a=1/10
    b=1
    for k in range(0,n):
        c=...
        b=...
        a=c
    return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n) .

2. On rappelle que la fonction : $x \rightarrow e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 2.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
 $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$.
- 2.b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de la suite (a_n) et B la limite de la suite (b_n) .
On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0;1]$ et que $A = e^{-B}$ et $B = e^{-A}$.
- 3.a. Démontrer que $f(A) = 0$.
- 3.b. Déterminer : $A - B$.

CORRECTION

Partie A

1. $x \in]0;1]$ $f(x) = e^{-x} + \ln(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = e^{-0} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

2. $x \in]0;1]$ $(e^{-x})' = -e^{-x}$ $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x} = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$.

3. $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow 0 > -x \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq -x < 0$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-x} < 1$

$0 < e^{-1} \leq e^{-x} < 1$ et $0 < x \leq 1$ donc $0 < xe^{-x} < 1$.

On obtient $0 < 1 - xe^{-x}$ c'est à dire $f'(x) > 0$

$f(1) = e^{-1} + \ln(1) = e^{-1}$

Tableau de variation de f

x	0	1
f'(x)		+
f(x)	$-\infty$	e^{-1}

4. f est dérivable sur $]0;1]$, f est strictement croissante sur $]0;1]$ à valeurs dans $]-\infty; e^{-1}]$, $0 \in]-\infty; e^{-1}]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution L appartenant à $]0;1]$.

Partie B

1.a. $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} \simeq 0,37$ à 10^{-2} près.

$b_1 = e^{-a_0} = e^{-0,1} \simeq 0,91$ à 10^{-2} près.

1.b.

```
def termes(n):
    a=1/10
    b=1
    for k in range(0,n):
        c= e-b
        b= e-a
        a=c
    return(a,b)
```

2.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$.

. Initialisation

$a_0 = 0,1$ $a_1 = e^{-1} \simeq 0,37$ $b_1 = e^{-0,1} \simeq 0,91$ $b_0 = 1$

On a donc : $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

• Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1 \quad \text{et on doit démontrer que} \quad 0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq 1.$$

La fonction : $x \rightarrow e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\text{Si } 0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1 \quad \text{alors} \quad e^{-0} > e^{-a_n} \geq e^{-a_{n+1}} \geq e^{-b_{n+1}} \geq e^{-b_n} \geq e^{-1}$$

$$e^0 = 1 \quad e^{-a_n} = b_{n+1} \quad e^{-a_{n+1}} = b_{n+2} \quad e^{-b_{n+1}} = a_{n+2} \quad e^{-b_n} = a_{n+1} \quad e^{-1} \simeq 0,37 > 0$$

$$\text{donc } 1 > b_{n+1} \geq b_{n+2} \geq a_{n+2} \geq a_{n+1} \geq e^{-1} > 0 \quad \text{on obtient} \quad 0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq 1$$

• Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1.$$

2.b. Pour tout entier naturel n , on a $a_n \leq a_{n+1} \leq 1$ donc la suite (a_n) est croissante et majorée par 1,

la suite (a_n) est donc convergente.

Pour tout entier naturel n , on a $0 < b_{n+1} \leq b_n$ donc la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0,

la suite (b_n) est donc convergente.

3.a. Pour tout nombre réel $x \in]0;1]$ $f(x) = e^{-x} + \ln(x)$

$$A \in]0;1] \quad f(A) = e^{-A} + \ln(A) \quad \text{or} \quad e^{-A} = B \quad \text{et} \quad A = e^{-B} \quad \text{on a donc} \quad \ln(A) = \ln(e^{-B}) = -B$$

$$\text{et} \quad f(A) = B - B = 0.$$

3.b. $f(B) = e^{-B} + \ln(B)$ or $e^{-B} = A$ et $B = e^{-A}$ on a donc $\ln(B) = \ln(e^{-A}) = -A$

$$\text{et} \quad f(B) = A - A = 0.$$

Nous avons $f(A) = f(B) = 0$ et nous avons démontré dans la question 4 de la partie A que l'équation

$$f(x) = 0 \quad \text{admet une unique solution dans l'intervalle }]0;1] : L \quad \text{donc} \quad A = B = L \quad \text{et} \quad A - B = 0.$$