

**EXERCICE 4 6 points Thème : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme; Suites**

**Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  de  $]0; 1]$  par :

$$f(x) = e^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de  $f$  en 0.
2. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; 1]$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; 1]$ , on a :

$$f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$$

3. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; 1]$ , on a  $xe^{-x} < 1$ .  
En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; 1]$ .

4. Démontrer qu'il existe un unique réel  $\ell$  appartenant à  $]0; 1]$  tel que  $f(\ell) = 0$ .

**Partie B**

1. On définit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

- a. Calculer  $a_1$  et  $b_1$ . On donnera des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près.
- b. On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :  
    a=1/10  
    b=1  
    for k in range(0,n) :  
        c= ...  
        b = ...  
        a = c  
    return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction `termes` calcule les termes des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

2. On rappelle que la fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$$

- b. En déduire que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes.
3. On note  $A$  la limite de  $(a_n)$  et  $B$  la limite de  $(b_n)$ .  
On admet que  $A$  et  $B$  appartiennent à l'intervalle  $]0; 1]$ , et que  $A = e^{-B}$  et  $B = e^{-A}$ .
  - a. Démontrer que  $f(A) = 0$ .
  - b. Déterminer  $A - B$ .