

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Primitive d'une fonction continue

1) Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemples :

a) L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x .

Dans ce cas, une solution de cette équation est $y = 5x$. En effet, $(5x)' = 5$.

b) Une solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.

Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.

Par exemple, $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle.

En effet, $(x^2 + 1)' = 2x$.

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a : $g'(x) = f(x)$.

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Prouver que la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Pour tout x de sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$$

Donc, g est bien solution de l'équation $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

3) Primitive d'une fonction

Exemple :

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + 3 \quad \quad \quad x \mapsto x^2 + 3x - 1$$

On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.

F est donc solution de l'équation différentielle $y' = f$.

On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I , une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

« F a pour dérivée f » et « f a pour primitive F ».

Exemple :

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x .

4) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ $] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$ pour $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

5) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstrations :

- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

6) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Une primitive	Conditions
$\frac{u'u^n}{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

Méthode : Recherche de primitives

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

- a) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$
c) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$ sur $I = \mathbb{R}$ d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$
e) $f(x) = x^2 e^{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$ f) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$ sur $I = \mathbb{R}$

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = 3x^2 - 3x^{-3}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \frac{1}{-2}x^{-2} = x^3 + \frac{3}{2x^2}$

c) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$ du type $u'u^n$
avec $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$

Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$

Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 2x$

Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$

Soit : $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$

e) $f(x) = x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} 3x^2 e^{x^3}$ du type $u'e^u$ avec $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$
 Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u .
 Soit : $F(x) = \frac{1}{3} e^{x^3}$

f) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1) = \frac{1}{5} \times 5 \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$
 Donc $F(x) = \frac{1}{5} \sin(5x) + \cos(3x - 1)$

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration au programme :

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I .

Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.

La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I , elle est donc constante sur I .

On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I .

On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I .

Démonstration :

F est une primitive de f .

On pose $G(x) = F(x) + C$.

$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.

Donc G est une primitive de f .

Exemple :

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$.

Donc, toute fonction de la forme $G_C(x) = \frac{x^2}{2} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, est une primitive de f .

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Démontrée dans le chapitre Intégration -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

- 1) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f .
- 2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

1) La fonction F est une primitive de f , si $F' = f$.

$$F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x).$$

2) Toutes les primitives de f sont de la forme : $G(x) = F(x) + C$ où C est un nombre réel.

On cherche la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$

$$\text{Donc : } F(1) + C = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{e^{2 \times 1}}{1} + C = 0$$

$$C = -e^2$$

La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :

$$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$$