

Exercice 1 :

1) $y' = 3y$

Donc $y = Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

2) $y' + 2y = 0$

$y' = -2y$

Donc $y = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3) $2y + 3y' - 1 = 0$

$3y' = -2y + 1$

$y' = \frac{-2}{3}y + \frac{1}{3}$

Donc $y = Ce^{\frac{-2}{3}x} - \frac{1}{\frac{-2}{3}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$y = Ce^{\frac{-2}{3}x} + \frac{3}{2}$

4) $y = -5y'$ avec $y(-2) = 1$

Donc $y = Ce^{-5x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Or $y(-2) = 1$ donc $Ce^{-5 \times (-2)} = 1$

$Ce^{10} = 1$

$C = \frac{1}{e^{10}}$

$C = e^{-10}$

Donc $y = e^{-10} e^{-5x}$ que l'on peut aussi écrire $y = e^{-5x-10}$

5) $y + 2y' = 0$ avec $y'(-2) = \frac{1}{2}$

$y' = \frac{-1}{2}y$

Donc $y = Ce^{\frac{-x}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Or $y'(-2) = \frac{1}{2}$ et $y' = \frac{-1}{2}y$ ce qui signifie que $y' = -\frac{1}{2} \times Ce^{\frac{-x}{2}}$

Donc $-\frac{1}{2} \times Ce^{\frac{-(-2)}{2}} = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}Ce = \frac{1}{2}$

$C = \frac{-1}{e}$

$C = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}e}$

$C = -e^{-1}$

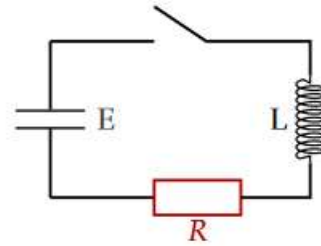
Donc $y = -e^{-1} e^{\frac{-x}{2}}$ que l'on peut aussi écrire $y = -e^{\frac{-x}{2}-1}$.

Exercice 2 :

Le circuit ci-contre comprend une bobine d'induction L , une résistance R . L'origine du temps est à la fermeture du circuit.

À $t = 0$, l'intensité i est nulle. La force électromotrice aux bornes du circuit est constante et égale à E . On sait que l'intensité $i(t)$ est telle que, à l'instant $t > 0$ on a :

$$Li'(t) + Ri(t) = E$$



1) Résoudre cette équation différentielle. Trouver la fonction i telle que $i(0) = 0$.

2) Déterminer la limite de $i(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Commenter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

1) $Li' + Ri = E$

$$Li' = E - Ri$$

$$i' = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}i$$

$$i' = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L}$$

$$\text{Donc } i = Ce^{\frac{-R}{L}t} - \frac{\frac{E}{L}}{\frac{-R}{L}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$i = Ce^{\frac{-R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

$$\text{Or } i(0) = 0 \text{ donc } Ce^{\frac{-R}{L} \times 0} + \frac{E}{R} = 0$$

$$C = -\frac{E}{R}$$

$$\text{Donc } i = -\frac{E}{R}e^{\frac{-R}{L}t} + \frac{E}{R}.$$

2) E et R sont deux grandeurs positives donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{-R}{L}t} = 0$ Donc par produit et somme de limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{E}{R}$.

Cela signifie qu'après un temps très long l'intensité est constante et vaut $\frac{E}{R}$.

Exercice 3 :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$.

- 1) Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E) .

p est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$p'(x) = a \times 2e^{2x}$$

$$p'(x) = 2ae^{2x}$$

$$p' + 3p = 2ae^{2x} + 3(ae^{2x})$$

$$p' + 3p = e^{2x}(2a + 3a)$$

$$p' + 3p = 5ae^{2x}$$

$$\text{Or } p' + 3p = e^{2x}$$

$$\text{Donc } 5ae^{2x} = e^{2x}$$

$$\text{Donc } a = \frac{e^{2x}}{5e^{2x}}$$

$$a = \frac{1}{5}$$

Donc p est une solution particulière de (E) lorsque $a = \frac{1}{5}$.

- 2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) .

Il faut d'abord résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y_0' + 3y_0 = 0$

$$y_0' = -3y_0$$

Donc $y_0 = Ce^{-3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Or la solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière donc $y = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$.

- 3) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

$$Ce^{-3 \times 0} + \frac{1}{5}e^{2 \times 0} = 1$$

$$C + \frac{1}{5} = 1$$

$$C = \frac{4}{5}$$

Donc dans ce cas $y = \frac{4}{5}e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

$$y' + 2y = 0$$

$$y' = -2y$$

Donc $y = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

2) Vérifier que g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E) .

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = -3 \times (-3)e^{-3x} = 9e^{-3x}$$

En remplaçant y par g dans (E) nous avons :

$$9e^{-3x} + 2(-3e^{-3x}) = 9e^{-3x} - 6e^{-3x}$$

$$9e^{-3x} + 2(-3e^{-3x}) = 3e^{-3x}$$

Donc g est bien une solution de l'équation (E) .

3) En déduire toutes les solutions de (E) .

L'ensemble des solutions de (E) est la somme de la solution homogène et de la solution particulière.

Donc $y = Ce^{-2x} - 3e^{-3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

4) f est-elle une solution de (E) ?

f est donc une solution de (E) car cette fonction est de la même forme que y avec

$$C = \frac{9}{2}.$$