

Exercice 6. Nombre de noyaux radioactifs**3 points**

Soit $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant t , où t est exprimé en jours.
On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est une constante réelle.

1. Déterminer $N(t)$ en fonction de a , sachant que $N(0) = 10^9$.
2. Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié.
Calculer la valeur exacte de a .
3. Au bout de combien de jours le nombre de noyaux radioactifs deviendra-t-il inférieur à 100 ?

Exercice 7.**3 points**

Soit pour x réel l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = x e^x$$

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution de (E) .
2. En déduire toutes les solutions de (E) .
3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 8. Problème**7 points**

On cherche si il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) : \forall x \in \mathbb{R}, \left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 = 1 \\ (2) : f'(0) = 1 \\ (3) : f' \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

1.
 1. a. Démontrer que, pour tout réel x on a : $f'(x) \neq 0$.
 1. b. Calculer $f(0)$.
2. En dérivant chaque membre de l'égalité (1), démontrer que :

$$(4) : \text{pour tout nombre réel } x, \text{ on a : } f''(x) = f(x).$$

3. On pose $\begin{cases} u = f' + f \\ v = f' - f \end{cases}$.
 3. a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
 3. b. Démontrer que $u' = u$ et que $v' = -v$.
 3. c. En déduire les expressions de u et v en résolvant les équations différentielle précédentes.
 3. d. Déduire des questions précédentes que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.