

Equations différentielles

1) Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme :

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.

Donc $f'(x) = af(x)$.

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x)$.

Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.

Ainsi : $g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x)$
 $= -e^{-ax} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0$.

La fonction g est donc égale à une constante réelle C , soit :

$e^{-ax} \times f(x) = C$.

Et donc : $f(x) = C \times \frac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1) a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2) Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

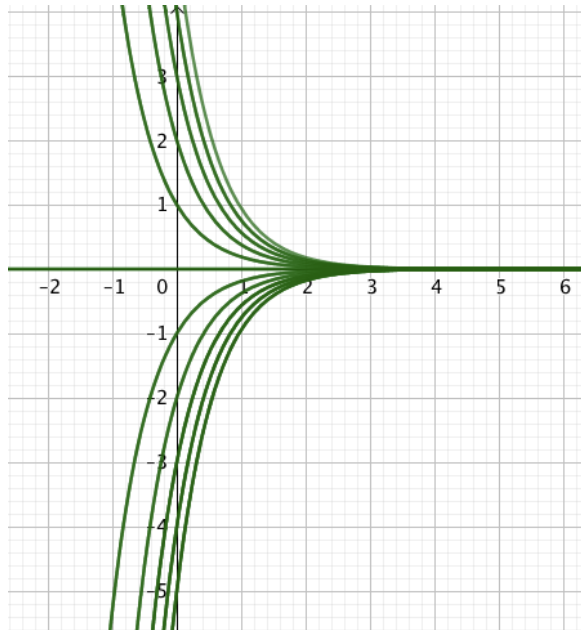
1) a) $3y' + 5y = 0$

$$3y' = -5y$$

$$y' = -\frac{5}{3}y$$

Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = C e^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C , on obtient :



2) $y(1) = 2$

Donc : $C e^{-\frac{5}{3} \times 1} = 2$

$$C e^{-\frac{5}{3}} = 2$$

$$C = 2e^{\frac{5}{3}}$$

Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3} - \frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf , $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :

- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$

- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

2) Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.

Or : $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.

Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.

g est donc solution de l'équation $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto u(x) + v(x)$$

où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$
et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

2) Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$.

1) $2y' - y = 3$

$$2y' = y + 3$$

$$y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

Les solutions sont de la forme : $y_c(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{\frac{1}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Soit : $y_c(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$

2) $y(0) = -1$

Donc : $Ce^{\frac{1}{2} \times 0} - 3 = -1$

$$C - 3 = -1$$

$$C = 2$$

Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

3) Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I .
 Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto u(x) + v(x)$$
 où u est une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$
 et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

- 1) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.
- 2) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

$$1) u'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } u'(x) - 2u(x) &= -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation $y' - 2y = x^2$.

2) Les solutions de l'équation : $y' = 2y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de l'équation $y' - 2y = x^2$ sont de la forme :

$y_c(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$, **somme** d'une solution particulière de l'équation $y' - 2y = x^2$ et de la forme générale des solutions de l'équation $y' = 2y$.