

Feuille d'exercices vers le supérieur

Intégrales

Terminale spécialité Mathématiques

Exercice 1: Décomposition en éléments simples et intégrales

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^3+6x^2+12x-1}{(x+2)^2}$

- a) Déterminer les réels a , b , et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$.
- b) En déduire $\int_{-1}^4 f(x)dx$.

Exercice 2: Suites et intégrales

On pose $I_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$ avec $n \in \mathbb{N}$

- a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < I_n < \int_0^1 t^n dt$.
- b) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n dt = 0$.
- c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 3: Parties entières, intégrales et séries

On considère la fonction f définie pour tout réel positif par $f(x) = x(x - E(x))$, où E désigne la fonction partie entière.

- a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, construire le graphique de f pour $x \in [0; 3[$.
- b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in [k; k+1[$.
- c) Calculer $u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt$.
- d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.
- e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^n f(t)dt$.

Indication

On rappelle que la formule pour calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est : $\frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$