

Feuille d'exercices vers le supérieur

Intégrales

Terminale spécialité Mathématiques

Correction de l'exercice 1

a) Supposons que a , b et c existent.

$$ax + b + \frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax(x+2)^2 + b(x+2)^2 + c}{(x+2)^2}$$

$$ax + b + \frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax(x^2 + 4x + 4) + b(x^2 + 4x + 4) + c}{(x+2)^2}$$

$$ax + b + \frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax^3 + 4ax^2 + 4ax + bx^2 + 4bx + 4b + c}{(x+2)^2}$$

On factorise par x^3 , x^2 , x et on obtient :

$$ax + b + \frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax^3 + (4a+b)x^2 + (4a+4b)x + 4b+c}{(x+2)^2}$$

Par identification on a le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 6 \\ 4a + 4b = 12 \\ 4b + c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ 4a + 4b = 12 \\ c = -9 \end{cases}$$

De plus on a bien $4a + 4b = 12$ donc on a bien trouvé les solutions de ce système.

b)

$$\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^4 \left(x + 2 - \frac{9}{(x+2)^2}\right)dx$$

Par linéarité de l'intégrale on a

$$\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^4 xdx + \int_{-1}^4 2dx - 9 \int_{-1}^4 \frac{1}{(x+2)^2}dx$$

les deux premières intégrales sont très simples à calculer. La dernière il faut déjà trouver une primitive de $(x+2)^{-2}$

On peut primitiver grâce à $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$, où $u = x+2$ et donc $u' = 1$. Une primitive de $(x+2)^{-2}$ est donc $\frac{(x+2)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x+2}$

Ainsi l'intégrale est :

$$\int_{-1}^4 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^4 + [2x]_{-1}^4 - 9\left[\frac{-1}{x+2}\right]_{-1}^4$$

$$\int_{-1}^4 f(x)dx = 4 - \frac{1}{2} + 8 + 2 - 9\left(\frac{-1}{4+2} - \frac{-1}{-1+2}\right)$$

$$\int_{-1}^4 f(x)dx = 6$$

Correction de l'exercice 2

a)

$$0 \leq \sin(\pi t) \leq 1$$

$$0 \times t^n \leq t^n \sin(\pi t) \leq 1 \times t^n$$

(le sens ne change pas car t^n est positif)

$$0 \leq t^n \sin(\pi t) \leq t^n$$

Et le passage à l'intégrale conserve l'ordre donc :

$$\int_0^1 0 < I_n < \int_0^1 t^n dt$$

$$0 < I_n < \int_0^1 t^n dt$$

b) Tout d'abord il faut calculer la valeur de $\int_0^1 t^n dt$

Une primitive de t^n est $\frac{t^{n+1}}{n+1}$, donc

$$\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}$$

$$\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Et donc en calculant la limite on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n dt = 0$$

c) D'après le théorème des gendarmes et l'inégalité démontrée à la question a) on a directement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt = 0$$

Correction de l'exercice 3

a)

b) $E(x) = k$ donc $f(x) = x(x - k) = x^2 - xk$

c) On calcule d'abord une primitive de $x^2 - xk$. Cette primitive est $\frac{x^3}{3} - k\frac{x^2}{2}$. Donc

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{(k+1)^3}{3} - k\frac{(k+1)^2}{2} - \left(\frac{k^3}{3} - k\frac{k^2}{2}\right)$$

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} - \frac{k^3 + 2k^2 + k}{2} + \frac{k^3}{6}$$

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{2k^3 + 6k^2 + 6k + 2}{6} - \frac{3k^3 + 6k^2 + 3k}{6} + \frac{k^3}{6}$$

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 - 3k^3 - 6k^2 - 3k + k^3}{6}$$

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 - 3k^3 - 6k^2 - 3k + k^3}{6}$$

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{3k + 2}{6}$$

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}$$

d) On rappelle qu'une suite arithmétique est de la forme $v_n = v_0 + rn$. C'est bien le cas ici avec $r = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{3}$

e)

$$\int_0^n f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt + \dots + \int_{n-1}^n f(t)dt$$

$$\int_0^n f(t)dt = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\int_0^n f(t)dt = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{3} \right)$$