

Exercice 2

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx.$$

1. a. On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$F_1(x) = (x - 1)e^x.$$

Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1 .

- b. Calculer I_1 .

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,

$$I_{n+1} = e - (n + 1)I_n.$$

3. Calculer I_2 .

4. On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

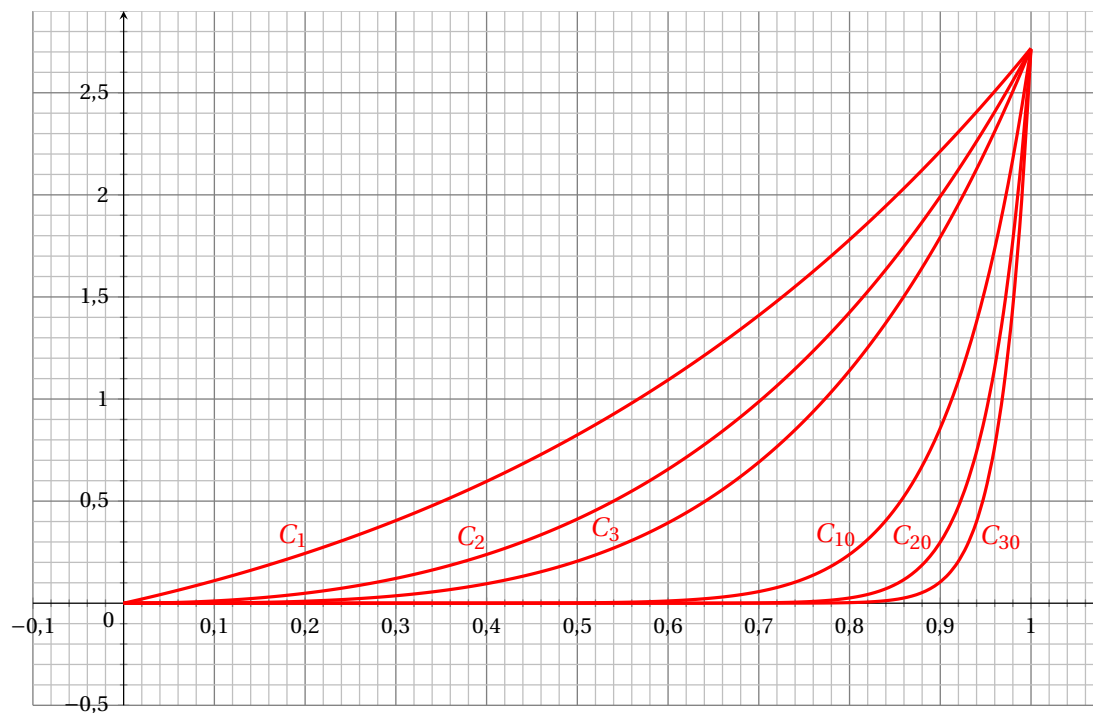
```
from math import e # la constante d'Euler e

def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i + 1)*a
        L.append(a)
    return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30} .



a. Donner une interprétation graphique de I_n .

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx.$$

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.