

11/11

Exercice 5.

1.a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 = 1$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$.
 Par somme, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) + 1 = -\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ Par produit:
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = -\infty$.

1.b) Par croissance comparée,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$).

$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$
 $= \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$
 $= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par produit,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc par somme,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1.c) On en déduit que la courbe C admet une asymptote horizontale telle que $y = 0$ et une asymptote verticale telle que $x = 0$.

2.a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est un quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$ $u = 1 + \ln(x)$ $v = x^2$
 $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2}$ $u' = \frac{1}{x}$ $v' = 2x$
 $= \frac{x - 2x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x(1 - 2 - 2 \ln(x))}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$

2.b) $-1 - 2\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2\ln(x) \geq 1$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \leq e^{-\frac{1}{2}}$

2.c)

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Signe de $-1 - 2\ln x$	+	0	-
Signe de x^3	+		+
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	$-\infty$	$f(e^{-\frac{1}{2}}) \approx 1,3591$	0

3a) On veut montrer qu'il existe une unique solution α pour $f(x) = 0$.

- f est continue sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}]$ car elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donc sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}] \subset]0; +\infty[$.
- f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; e^{-\frac{1}{2}}]$.
- $-\infty < 0 < 1,3591 \Leftrightarrow -\infty < 0 < f(e^{-\frac{1}{2}})$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution α sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}]$ à $f(\alpha) = 0$ telle que $f(x) = 0$.

Or, on sait que sur $[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$, f est continue (car dérivable) strictement décroissante, mais que $0 \notin [f(e^{-\frac{1}{2}}); 0[$.

Donc il n'existe pas de solution β telle que $f(\beta) = 0$ sur l'intervalle $[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$.

On en conclut qu'il existe une unique solution α sur $]0; +\infty[$ à $f(x) = 0$ et donc un unique point d'intersection entre C et l'axe des abscisses.

$\frac{1 + \ln(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(\alpha) = 0$ (car $\alpha^2 \neq 0$).

$\Leftrightarrow \ln(\alpha) = -1$.

$\Leftrightarrow \alpha = e^{-1}$.

Donc $M(e^{-1}; 0)$

3b) $f < 0$ sur l'intervalle $]0; e^{-1}]$ et $f > 0$ sur $[e^{-1}; +\infty[$.

4a) $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$

F est dérivable car c'est un quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$F'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x - (-2 - \ln(x))}{x^2}$$

$$\begin{aligned} u &= -2 - \ln(x) & v &= x \\ u' &= -\frac{1}{x} & v' &= 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{-1 + 2 + \ln(x)}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

$F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4.b) f est positive et continue sur $[e^{-1}; +\infty[$.

$$I_n = \int_{e^{-1}}^n f(x) = F(n) - F(e^{-1})$$

$$= \frac{-2 - \ln(n)}{n} - \frac{-2 - \ln(e^{-1})}{e^{-1}}$$

$$= \frac{-2 - \ln(n)}{n} - \frac{-2 + 1}{e^{-1}} = \frac{-2 - \ln(n)}{n} + \frac{1}{e^{-1}}$$

$$I_n = \frac{-2 - \ln(n)}{n} + e$$

$$4.c) \lim_{n \rightarrow +\infty} e = e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(n)}{n} = 0$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n} = 0$. Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = e$.
L'aire sous la courbe est égale à e .