

### Exercice 2 :

Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{t} dt$ .

1) Quel est  $D_g$  le domaine de définition de  $g$  ?

2) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $D_g$  et calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in D_g$ . (Aide : il peut être utile de décomposer l'intégrale comme suit :  $\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{x}}^c \frac{\ln(t)}{t} dt + \int_c^x \frac{\ln(t)}{t} dt$  avec

$c$  compris entre  $x$  et  $\frac{1}{x}$ ).

3) Montrer que  $g$  est la fonction nulle.

### Exercice 3 :

En probabilité, on définit la **loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$**  de la façon suivante : si  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle alors, pour tous réels  $a > 0$  et  $b > 0$  vérifiant  $a \leq b$ , on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. a. Démontrer que  $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ .

b. Démontrer que  $P(0 \leq X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$ .

2. La durée de vie (en mois) d'une montre connectée est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,05$ . Quelle est la probabilité qu'une telle montre ait une durée de vie comprise entre 6 mois et 2 ans ?

### Exercice 1 :

#### **Suite et intégrale**

On considère la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ .

- 1) Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = (-1 - x) e^{1-x}$  est une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x e^{1-x}$ .
- 2) En déduire que  $I_1 = e - 2$ .
- 3) On admet que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $I_{n+1} = (n + 1)I_n - 1$ .
  - a) Utiliser cette formule pour calculer  $I_2$ .
  - b) Écrire un algorithme permettant de calculer  $I_n$ ,  $n$  étant donné. Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  de  $I_{15}$  puis conjecturer la limite de la suite  $(I_n)$ .
- 4)
  - a) Justifier que, pour  $x \in [0 ; 1]$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ .
  - b) En déduire que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ .
  - c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .