

Exercice : Votre première intégrale impropre

Dans cet exercice le but est de déterminer $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

1) Déterminer a et b tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a bien

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1} .$$

2) A l'aide d'une intégration par partie,

Calculer $K(a) = \int_a^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ avec $a \in]0; 1]$.

3) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} K(a)$, puis $\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$

4) De même calculer $J(b) = \int_1^b \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ avec $b \in [1; +\infty[$

5) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(b)$, puis $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

6) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

Exercice : Votre première intégrale impropre

Dans cet exercice le but est de déterminer $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

1) Déterminer a et b tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a bien

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1} .$$

2) A l'aide d'une intégration par partie,

Calculer $K(a) = \int_a^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ avec $a \in]0; 1]$.

3) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} K(a)$, puis $\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$

4) De même calculer $J(b) = \int_1^b \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ avec $b \in [1; +\infty[$

5) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(b)$, puis $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

6) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.