

CALCUL INTÉGRAL (Chapitre 1/2)



En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIV^e siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).

Au milieu du XIX^e siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

I. Intégrale et aire

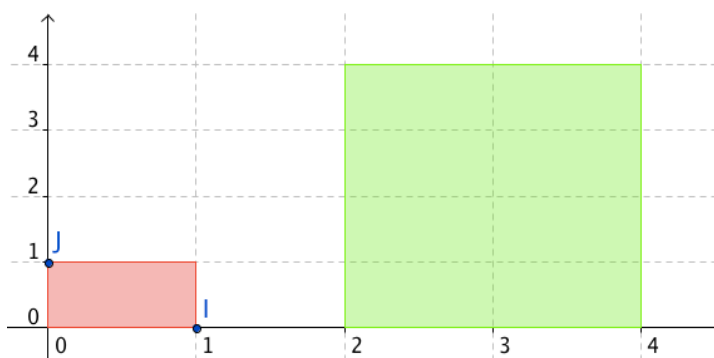
1) Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

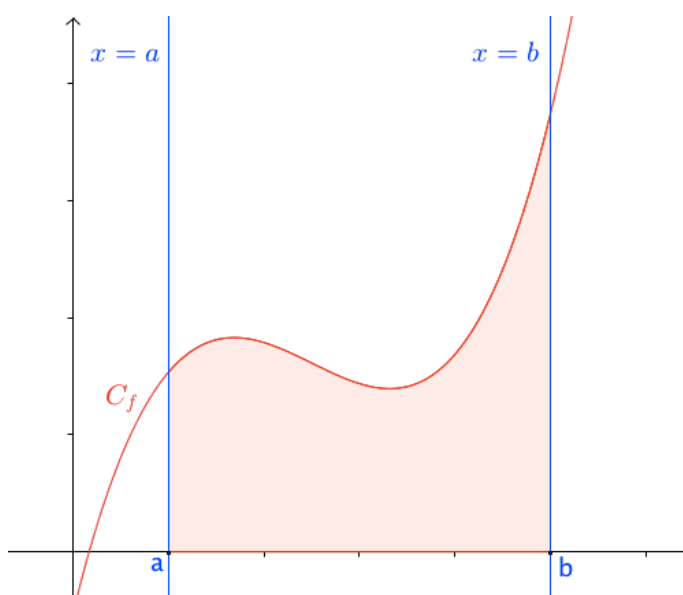
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).



2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a ; b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ se note :

$$\int_a^b f(x) dx$$

Et on lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ ».



Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.

Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Remarques :

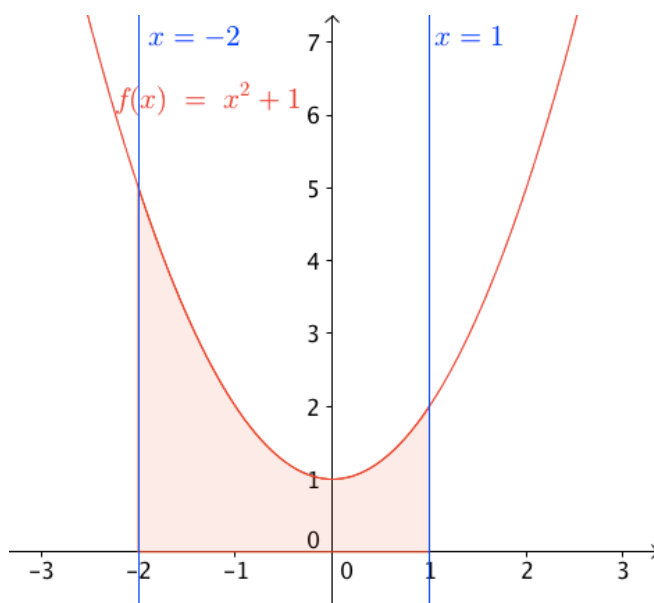
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

" dx " ou " dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 1]$ et se note $\int_{-2}^1 x^2 + 1 dx$.



Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir l'aire cherchée.

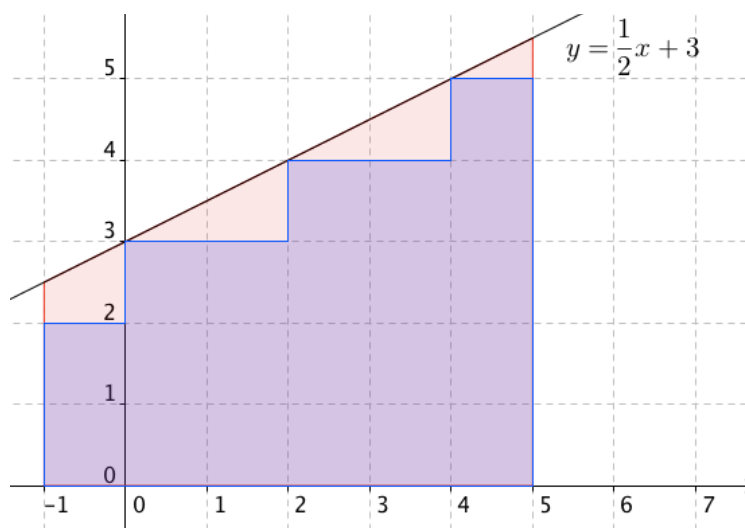
$$\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx$$

Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$.

a)



b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.

Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^5 f(x) dx = 21 \text{ u.a.} + 3 \text{ u.a.} = 24 \text{ u.a.}$

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

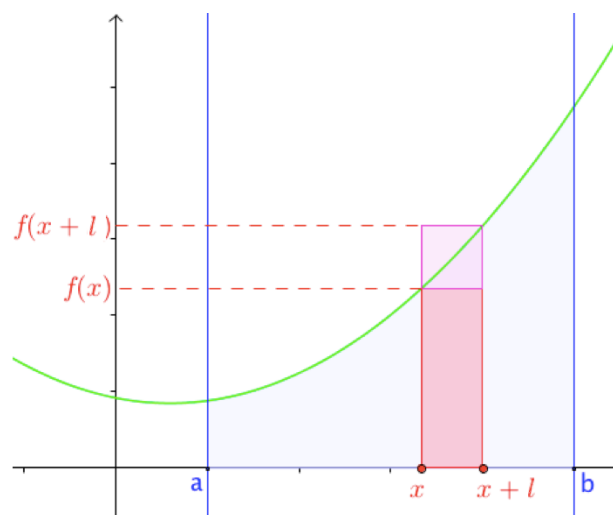
Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a ; b]$.

On partage l'intervalle $[a ; b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $[x ; x + l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x + l)$ qui a pour aire $l \times f(x + l)$.

Sur l'intervalle $[a ; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".



Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.

Langage naturel
Définir fonction rectangle(a, b, n)
$L \leftarrow (b-a)/n$
$x \leftarrow a$
$m \leftarrow 0$
$p \leftarrow 0$
Pour i allant de 0 à n-1
$m \leftarrow m + Lx f(x)$
$x \leftarrow x + L$
$p \leftarrow p + Lx f(x)$
FinPour
Afficher m et p

Exemple :

Avec Python, on programme l'algorithme pour la fonction $f(x) = x^2$.

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur $[1 ; 2]$.

```
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
>>> rectangle(1,2,10)
(2.1850000000000014, 2.4850000000000017)
>>> rectangle(1,2,50)
(2.3034000000000017, 2.3634000000000017)
>>> rectangle(1,2,100)
(2.3183500000000003, 2.3483500000000026)
>>>
```

On vérifie avec un logiciel de calcul formel :

$\int_1^2 x^2 dx$	$\frac{7}{3}$
$\int_1^2 x^2 dx$	2.33333

5) Extension aux fonctions de signe quelconque

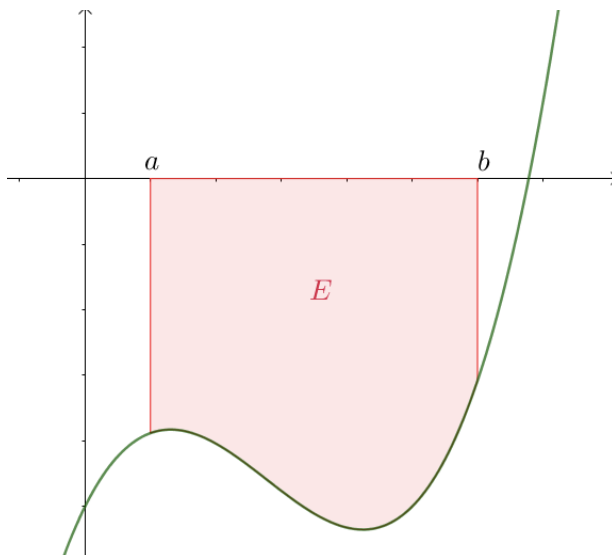
Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a ; b]$ le nombre $I = \int_a^b f(x) dx$ défini par :

- si f est positive sur $[a ; b]$: $I = \text{Aire}(E)$,

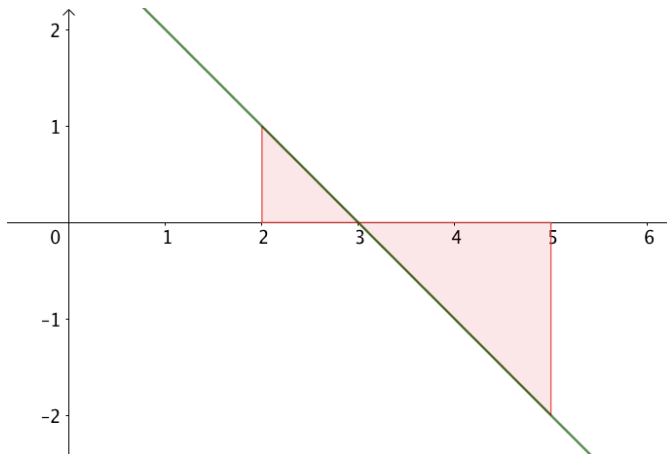
- si f est négative sur $[a ; b]$: $I = -\text{Aire}(E)$,

où E est la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple :

$$\int_2^5 3 - x \, dx = \frac{1 \times 1}{2} - \frac{2 \times 2}{2} = -1,5$$



6) Propriétés

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des réels de I .

a) $\int_a^a f(x) dx = 0$

b) $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

c) Relation de Chasles : $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Remarque :

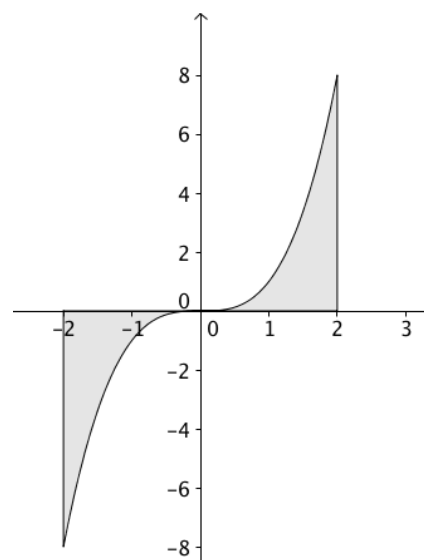
Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

Par exemple :

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = 0$$

La courbe représentative de la fonction cube est en effet symétrique par rapport à l'origine du repère, donc :

$$\int_{-2}^0 x^3 dx = - \int_0^2 x^3 dx$$

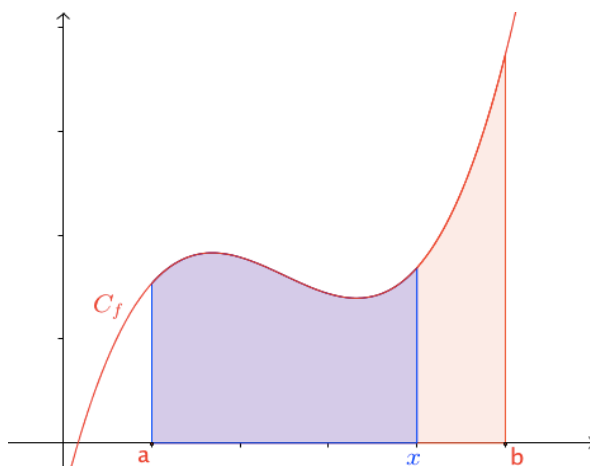


II. Intégrale et primitive

1) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .



Démonstration au programme dans le cas où f est strictement croissante :

- 1^{er} cas : $h > 0$

On considère deux réels x et $x + h$ de l'intervalle $[a ; b]$.

On veut démontrer que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $\text{Aire}(ABFE) = h \times f(x)$ et

$\text{Aire}(ABHG) = h \times f(x+h)$.

Comme f est croissante sur $[a; b]$, on a :

$h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$

Puisque $h > 0$, on a :

$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$$

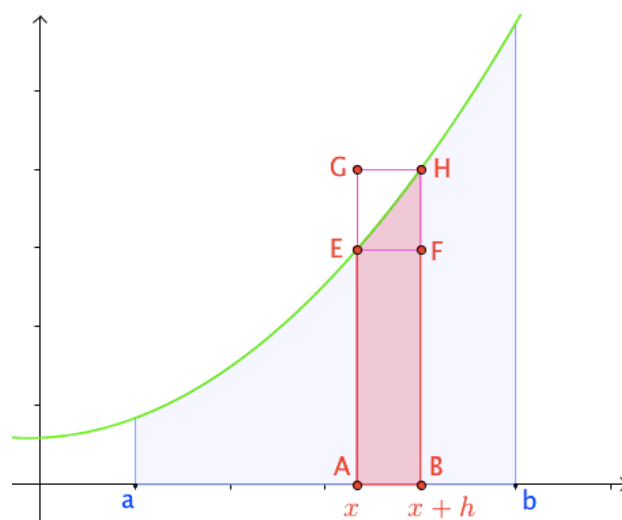
Comme f est continue sur $[a; b]$, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Et donc : $F'(x) = f(x)$.

F est donc une primitive de f .

Par ailleurs, F s'annule en a , car $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.



- 2^e cas : $h < 0$

La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

Conséquence immédiate :

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur $[0; 10]$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$.

a) Étudier les variations de F .

b) Tracer sa courbe représentative.

a) $t \mapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur $[0; 10]$ donc F est dérivable sur $[0; 10]$ et $F'(x) = \frac{x}{2} > 0$.

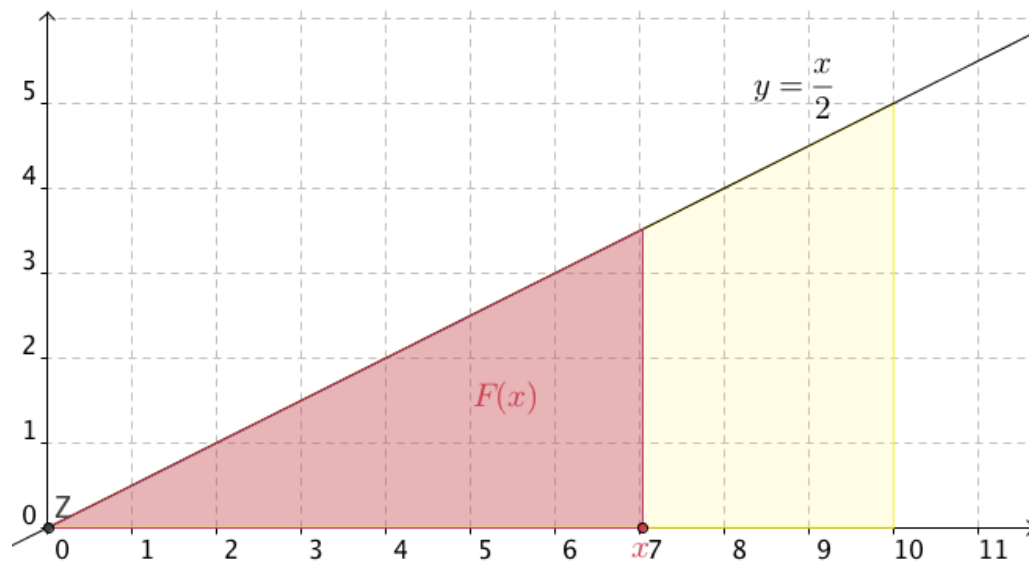
Donc F est croissante sur $[0; 10]$.

On dresse le tableau de variations :

x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0	25

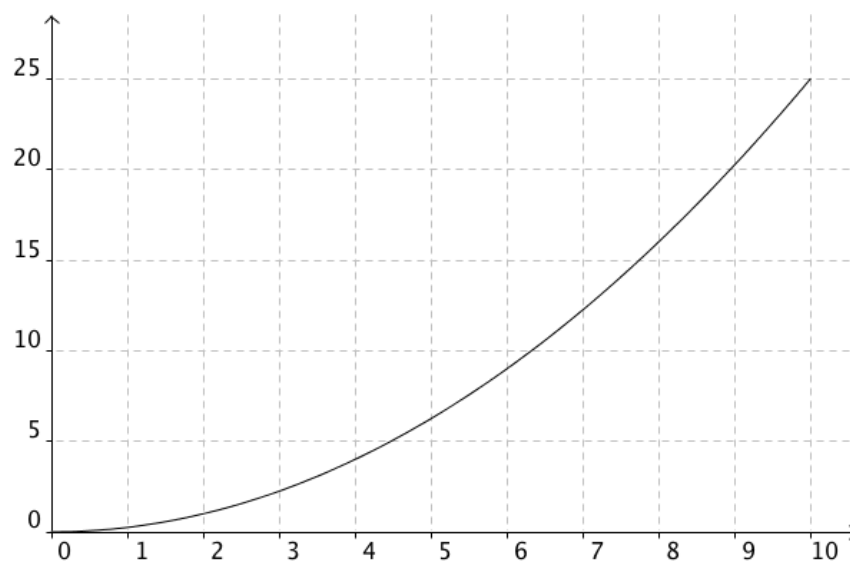
$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi $F(10) = \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ u. a.}$



b) Pour tout x de $[0 ; 10]$, on a $F(x) = \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4} \text{ u. a.}$

On a ainsi la représentation graphique de F :



2) Calcul d'intégrales

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration au programme :

La fonction G définie sur $[a ; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a ; b]$ d'après le premier théorème du paragraphe II.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a ; b]$, on a : $G(x) = F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

De plus, $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc :

$$k = -F(a).$$

$$\text{Or } G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + k = F(b) - F(a).$$

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a ; b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$$

$$B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 dx$$

$$C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$$

$$\text{On note : } f(x) = \frac{3}{x^2} = 3 \times \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Une primitive de } f \text{ est } F \text{ tel que : } F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$$

Donc :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^4 = F(4) - F(1) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{1}\right) = \frac{9}{4}$$

$$B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 dx$$

$$= [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5$$

$$= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) = 144$$

$$C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

On note : $f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$

Une primitive de f est F tel que : $F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x}$

Donc :

$$C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{1}{-2} e^{-2x} \right]_{-1}^1 = F(1) - F(-1)$$

$$= \frac{1}{-2} e^{-2 \times 1} - \frac{1}{-2} e^{-2 \times (-1)}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$$

3) Propriété de linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I .

a) Pour k réel, $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

b) $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Éléments de démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf
- $F + G$ est une primitive de $f + g$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

b) En déduire A et B .

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A + B = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx + \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \qquad A - B = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx - \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 x + \sin^2 x dx \qquad = \int_0^{2\pi} \cos^2 x - \sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, dx$$

$$= [x]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2 \times 2\pi) - \frac{1}{2} \sin(2 \times 0) = 0$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases} A + B = 2\pi \\ A - B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases} \text{ soit : } A = B = \pi$$

4) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$

Démonstration :

a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.

b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b f(x) - g(x) \, dx \geq 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} \, dx \leq e - 1$.

a) Sur $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que :

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 e^{x^2} \, dx \leq \int_0^1 e^x \, dx$$

$$\int_0^1 0 \, dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

D'où : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} \, dx \leq e - 1$.