

CALCUL INTÉGRAL (Chapitre 2/2)

I. Aire délimitée par deux courbes

Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admet que pour tout x de $[-1 ; 2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

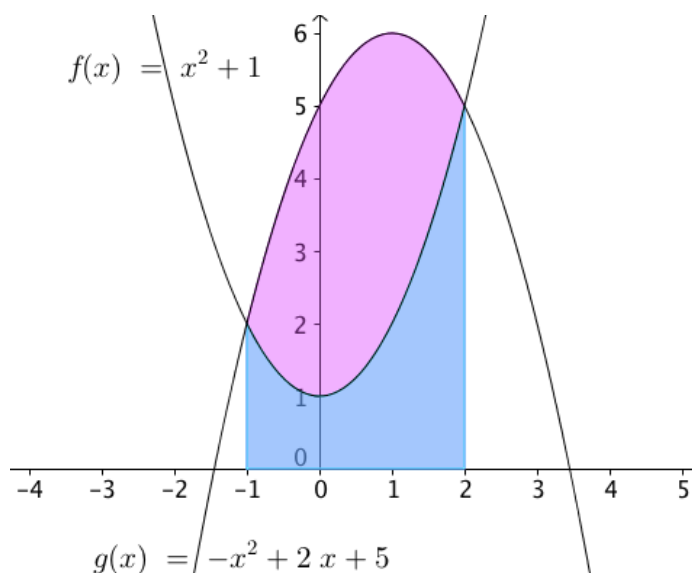
On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f .
Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} I_g &= \int_{-1}^2 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x \right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) \right) \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_f &= \int_{-1}^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Donc : $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9 \text{ u. a.}$



Remarque : Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx - \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx \\
 &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1 dx \\
 &= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 dx = \dots = 9
 \end{aligned}$$

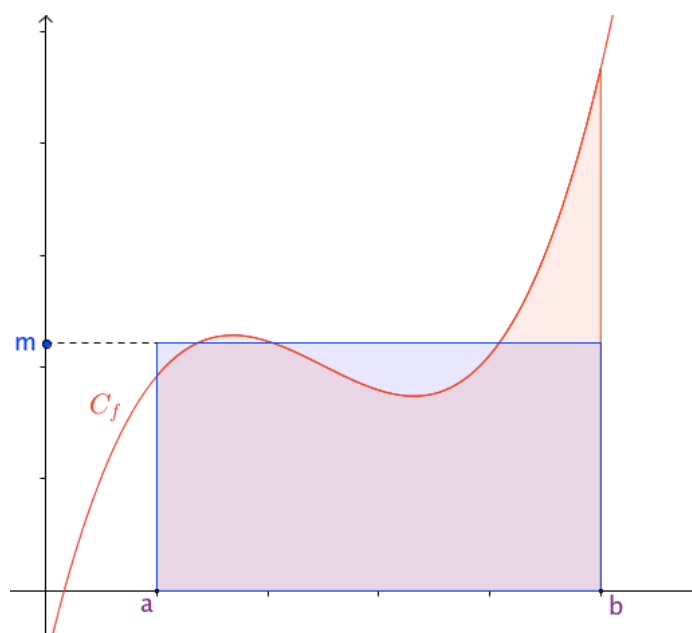
II. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \neq b$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de f (**en rouge ci-dessous**) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (**en bleu**), entre a et b .



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

$$m = \frac{1}{10-1} \int_1^{10} 3x^2 - 4x + 5 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} [x^3 - 2x^2 + 5x]_1^{10} \\
&= \frac{1}{9} ((10^3 - 2 \times 10^2 + 5 \times 10) - (1^3 - 2 \times 1^2 + 5 \times 1)) = \frac{1}{9} (850 - 4) = \frac{846}{9} = 94
\end{aligned}$$

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

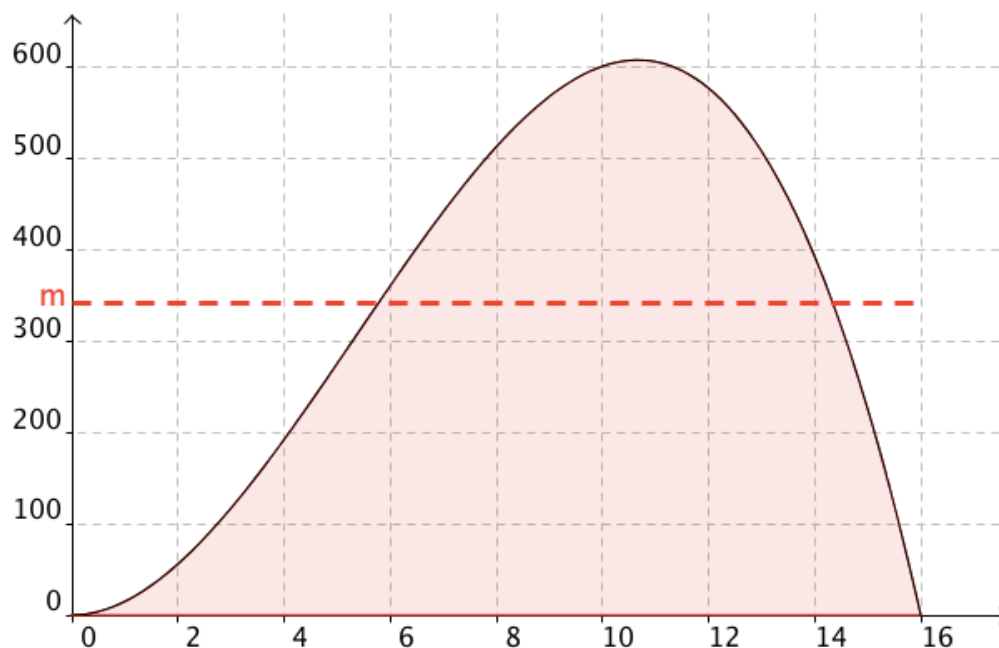
On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.

Au x -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{16 - 0} \int_0^{16} f(x) dx \\
&= \frac{1}{16} \int_0^{16} 16x^2 - x^3 dx \\
&= \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{16} \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right) \\
&= \frac{1024}{3} \approx 341
\end{aligned}$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



III. Intégration par parties

Théorème : Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a ; b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Démonstration au programme :

uv est dérivable sur $[a ; b]$ et on a : $(uv)' = u'v + uv'$

Les fonctions uv' , $u'v$ et $(uv)'$ sont continues sur $[a ; b]$, donc :

$$\begin{aligned} [u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b (uv)'(x) dx \\ &= \int_a^b (u'v + uv')(x) dx \\ &= \int_a^b (u'v)(x) dx + \int_a^b (uv')(x) dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Méthode : Calculer une intégrale en intégrant par parties

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$C = \int_1^{e^2} \ln x dx$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{v}{x} \underset{u'}{\sin x} dx$$

► Ce choix n'est pas anodin ! L'idée est ici de ne plus laisser de facteur x dans l'expression qu'il restera à intégrer. Il faudrait donc dériver x .

$$\begin{aligned} \text{On pose : } v(x) &= x & \rightarrow & v'(x) = 1 \\ u'(x) &= \sin x & \rightarrow & u(x) = -\cos x \end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{u'(x)}{x} \underset{v(x)}{\sin x} dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= [-\cos x \times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \times 1 dx \\
&= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \times \cos 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1
\end{aligned}$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{v}{x^2} \underset{u'}{\cos x} dx$$

On pose : $v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x$
 $u'(x) = \cos x \rightarrow u(x) = \sin x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx \\
&= [\sin x \times x^2]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times 2x dx \\
&= [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx
\end{aligned}$$

Or, dans le terme de droite, on reconnaît l'intégrale **A** de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s'agit ici d'une **double intégration par parties**.

On a donc :

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} - 0^2 \sin 0 - 2 \times 1 \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2
\end{aligned}$$

$$C = \int_1^{e^2} \underset{u'}{1} \times \underset{v}{\ln x} dx$$

On pose : $v(x) = \ln x \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$
 $u'(x) = 1 \rightarrow u(x) = x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$C = \int_1^{e^2} u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u(x)v'(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= [x \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \frac{1}{x} dx \\
&= e^2 \ln e^2 - 1 \ln 1 - \int_1^{e^2} 1 dx \\
&= e^2 \times 2 \ln e - [x]_1^{e^2} \\
&= e^2 \times 2 - e^2 + 1 \\
&= e^2 + 1
\end{aligned}$$

IV. Intégrales et suites

Méthode : Étudier une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier n , par :

$$I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$$

1) Calculer I_0 .

2) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

3) A l'aide d'un programme écrit en Python, conjecturer la limite de la suite (I_n) .

1) Pour $n = 0$, on a :

$$I_0 = \int_1^e x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} 1^2 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

2) L'objectif est d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .

$$I_{n+1} = \int_1^e \underset{u'}{x} (\ln x)^{\overset{v}{n+1}} dx$$

On pose : $v(x) = (\ln x)^{n+1} \rightarrow v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$

$$\underset{u'}{u'(x)} = x \rightarrow u(x) = \frac{1}{2} x^2$$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_1^e \underset{u'}{u'(x)} \underset{v}{v(x)} dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e \underset{u}{u(x)} \underset{v'}{v'(x)} dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n dx \\
&= \frac{1}{2} e^2 (\ln e)^{n+1} - \frac{1}{2} \times 1^2 (\ln 1)^{n+1} - \frac{n+1}{2} \int_1^e x (\ln x)^n dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n
\end{aligned}$$

Donc :

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

```

3) from math import*
def integ(n):
    I=(e**2-1)/2
    for k in range(1,n+1):
        I=e**2/2-k*I/2
    return I
>>> integ(5)
0.951367987633668
>>> integ(10)
0.5748317309902866
>>> integ(30)
39275840.04973485
>>> integ(100)
1.170494462774085e+112

```

On conjecture que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$

Remarque : En fait cette conjecture n'est pas exacte !

Pour en savoir plus, regarder ceci : <https://youtu.be/8l0jA4lCIKM?t=831>

Cela devrait démarrer à 13:56.