

Flash :

On donne l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev : $P(|X - E(X)| \geq 5) \leq 0,3$. Déterminer la variance de X .

Exercice d'application :

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,2$.

On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X .

On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.

Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$ soit supérieure à $0,95$.

Exercice dé :

On lance un dé équilibré à 4 faces n fois. On note M_n le nombre moyen de 1 obtenus.

- 1) Déterminer à partir de combien de lancers la probabilité que la moyenne soit comprise entre 0,2 et 0,3 (strictement) soit supérieure ou égale à 90 %.
- 2) Déterminer à partir de combien de lancers la probabilité que la moyenne soit comprise entre 0,24 et 0,26 (strictement) soit supérieure ou égale à 99 %.

Extrait du sujet 0 du BAC de 2024 :

Résultats à noter de la partie I et II : $E(X)=1,3$, $V(X)=0,57$, $E(Y)=6$ et $V(Y)=1,5$

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z .

2. Soit n un nombre entier strictement positif.

Pour i entier variant de 1 à n , on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.

On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$$

a. Quelle est l'espérance de M_n ?

b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5?

c. Pour les valeurs trouvées en b., montrer que la probabilité que $6,3 \leq M_n \leq 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice Oubli de clés :

Un professeur oublie fréquemment les clefs de sa salle de classe. S'il oublie ses clefs le jour n , la probabilité qu'il les oublie le lendemain est de 0,1. S'il n'oublie pas ses clefs le jour n , la probabilité qu'il les oublie le lendemain est de 0,4.

La probabilité qu'il les oublie le premier jour est de 0,2.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, l'événement E_n : « Le professeur oublie ses clefs le jour n . » et on note $p(E_n) = p_n$.

1) Calculer p_1 , p_2 et p_3 .

2) Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n pour tout entier $n > 0$.

3) Pour tout entier $n > 0$, on pose $u_n = p_n + a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Déterminer a pour que (u_n) soit géométrique.

4) Exprimer u_n puis p_n en fonction de n .

5) Déterminer la limite de la suite (p_n) et en donner l'interprétation.