

Exercice flash

D'après l'inégalité : $P(|X - E(X)| \geq 5) \leq \frac{V(X)}{5^2}$.

Donc $\frac{V(X)}{25} = 0,3$ et $V(X) = 0,3 \times 25 = 7,5$.

Exercice d'application :

On cherche à calculer n tel que $P(0,03 < M_n < 0,37) \geq 0,95$

Dans l'idée d'appliquer l'inégalité de concentration, on fait apparaître l'espérance de X dans l'inégalité.

Or, $E(X) = p = 0,2$

Ainsi, on cherche n tel que : $P(0,03 - 0,2 < M_n - 0,2 < 0,37 - 0,2) \geq 0,95$

Soit : $P(-0,17 < M_n - 0,2 < 0,17) \geq 0,95$

Soit encore : $P(|M_n - 0,2| < 0,17) \geq 0,95$

Et donc, en considérant l'évènement contraire :

$$1 - P(|M_n - 0,2| \geq 0,17) \geq 0,95$$

$$P(|M_n - 0,2| \geq 0,17) \leq 0,05$$

En prenant $\delta = 0,17$ dans l'inégalité de concentration, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq 0,05, \text{ avec } \frac{V(X)}{n \delta^2} = 0,05.$$

Or, $V(X) = p(1 - p) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$

On cherche donc un entier n tel que : $\frac{0,16}{n 0,17^2} \leq 0,05$

Et donc : $n \geq \frac{0,16}{0,05 \times 0,17^2} \approx 110,7$

Pour $n \geq 111$, la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03 ; 0,37[$ est supérieure à 0,95.

Exercice dé :

1) Ici on cherche à calculer : $P(0,2 < M_n < 0,3) \geq 0,9$.

De plus l'espérance de la moyenne est 0,25 .

Donc $P(0,2 < M_n < 0,3) \geq 0,9$

$$\Leftrightarrow P(0,2 - E(M_n) < M_n - E(M_n) < 0,3 - E(M_n)) \geq 0,9$$

$$\Leftrightarrow P(0,2 - 0,25 < M_n - E(M_n) < 0,3 - 0,25) \geq 0,9$$

$$\Leftrightarrow P(-0,05 < M_n - E(M_n) < 0,05) \geq 0,9$$

$$\Leftrightarrow P(|M_n - E(M_n)| < 0,05) \geq 0,9$$

Or pour l'inégalité de concentration il faut un inférieur ou égal. Or

$$P(|M_n - E(M_n)| < 0,05) = 1 - P(|M_n - E(M_n)| \geq 0,05)$$

Donc : $1 - P(|M_n - E(M_n)| \geq 0,05)$

$$\Leftrightarrow -P(|M_n - E(M_n)| \geq 0,05) \geq -0,1$$

$$\Leftrightarrow P(|M_n - E(M_n)| < 0,05) \leq 0,1$$

Or l'inégalité de concentration nous dit :

$$\Leftrightarrow P(|M_n - E(M_n)| < 0,05) \leq \frac{V(X)}{n \cdot 0,05^2}$$

Or la variance pour obtenir un 4 est $V(X) = p(1-p) = 0,25 \times 0,75 = 0,1875$.

$$\text{Donc } \frac{0,1875}{n \cdot 0,05^2} = 0,1$$

$$n = \frac{0,1875}{0,1 \times 0,05^2} = 750 \text{ .}$$

Donc il faut faire au moins 750 lancers.

2) Ici on cherche à calculer : $P(0,24 < M_n < 0,26) \geq 0,99$.

De plus l'espérance de la moyenne est 0,25 .

Donc $P(0,24 < M_n < 0,26) \geq 0,99$

$$\Leftrightarrow P(-0,01 < M_n - E(M_n) < 0,01) \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow P(|M_n - E(M_n)| < 0,01) \geq 0,99$$

Or pour l'inégalité de concentration il faut un inférieur ou égal. Or

$$P(|M_n - E(M_n)| < 0,01) = 1 - P(|M_n - E(M_n)| \geq 0,01)$$

Donc : $1 - P(|M_n - E(M_n)| \geq 0,01)$

$$\Leftrightarrow -P(|M_n - E(M_n)| < 0,05) \geq -0,01$$

$$\Leftrightarrow P(|M_n - E(M_n)| < 0,05) \leq 0,01$$

Or l'inégalité de concentration nous dit :

$$\Leftrightarrow P(|M_n - E(M_n)| < 0,01) \leq \frac{V(X)}{n \cdot 0,01^2}$$

Or la variance pour obtenir un 4 est $V(X) = p(1-p) = 0,25 \times 0,75 = 0,1875$.

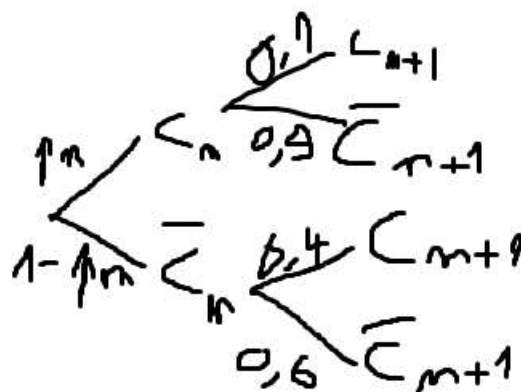
$$\text{Donc } \frac{0,1875}{n \cdot 0,01^2} = 0,01$$

$$n = \frac{0,1875}{0,01 \times 0,01^2} = 187500 \text{ .}$$

Donc il faut faire au moins 187500 lancers.

Exercice Oubli de clés :

2)



Donc $p_{n+1} = 0,1 p_n + 0,4(1 - p_n) = -0,3 p_n + 0,4$

3) $u_{n+1} = p_{n+1} + a$
 $u_{n+1} = -0,3 p_n + 0,4 + a$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-0,3 p_n + 0,4 + a}{p_n + a}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-0,3 \left(p_n + \frac{0,4+a}{-0,3} \right)}{p_n + a}$$

Donc on doit avoir $\frac{0,4+a}{-0,3} = a$

$$0,4 + a = -0,3 a$$

$$0,4 = -1,3 a$$

$$a = \frac{0,4}{-1,3} = \frac{-4}{13}$$

Donc en posant $a = \frac{-4}{13}$ (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -0,3$ et de plus

$$p_1 = 0,2 \text{ donc } u_1 = 0,2 - \frac{4}{13} = \frac{-7}{65} . \text{ On peut en déduire } u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{\frac{-7}{65}}{-0,3} = \frac{14}{39} .$$

3) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{14}{39} \times (-0,3)^n$.

De plus $u_n = p_n - \frac{4}{13}$

$$p_n = u_n + \frac{4}{13}$$

Donc on peut en déduire que $p_n = \frac{14}{39} \times (-0,3)^n + \frac{4}{13}$.

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,3)^n = 0$ car $-1 < -0,3 < 1$ donc par somme de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{4}{13}$.

Donc après un très long moment la probabilité que le professeur ait oublié ses clés est de $\frac{4}{13}$.