

Feuille d'exercices études de fonctions

Fonctions trigonométriques
Terminale spécialité Mathématiques

Correction de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \sin^2(-x) + \sqrt{3} \cos(-x)$$

$$f(-x) = (-\sin(x))^2 + \sqrt{3} \cos(x)$$

$$f(-x) = (\sin(-x))^2 + \sqrt{3} \cos(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc la fonction est paire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + 2\pi) = \sin^2(x + 2\pi) + \sqrt{3} \cos(x + 2\pi)$$

$$f(x + 2\pi) = (\sin(x))^2 + \sqrt{3} \cos(x)$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Donc la fonction est périodique de période 2π .

3. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2 \cos(x) \sin(x) - \sqrt{3} \sin(x)$$

$$f'(x) = \sin(x)(2 \cos(x) - \sqrt{3})$$

b) Etudions le signe de f' sur $[0; 2\pi]$.

$\forall x \in [0; \pi], \sin(x) \geq 0$ donc le signe dépend uniquement de $2 \cos(x) - \sqrt{3}$.

Soit $x \in [0; \pi]$

$$2 \cos(x) - \sqrt{3} \geq 0$$

$$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'après le cercle trigonométrique

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

De plus $f(0) = \sqrt{3}$; $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{7}{4}$; $f(\pi) = -\sqrt{3}$ Donc le tableau de signes et de variations est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\frac{7}{4}$	$-\sqrt{3}$

4. Comme la fonction est paire on a donc :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	$\frac{7}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{7}{4}$	$-\sqrt{3}$

On a donc déterminer les variations sur toute la période car la longueur de l'intervalle $[-\pi; \pi]$ est 2π . On peut donc répéter pour avoir le tableau de variation sur $[-\pi; 3\pi]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	3π
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	$\frac{7}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{7}{4}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{7}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{7}{4}$	$-\sqrt{3}$

Correction de l'exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cos(2(-x)) - \cos(-x)$$

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cos(-2x) - \cos(x)$$

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \cos(x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc la fonction est paire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2} \cos(2(x + 2\pi)) - \cos(x + 2\pi)$$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2} \cos(2x + 4\pi) - \cos(x)$$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \cos(x)$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Donc la fonction est périodique de période 2π .

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times (-2 \sin(2x)) + \sin(x)$$

$$f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x)$$

Or $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ donc

$$f'(x) = -2 \sin(x) \cos(x) + \sin(x)$$

$$f'(x) = \sin(x)(-2 \cos(x) + 1)$$

4. Etudions le signe de f' sur $[0; \pi]$.

$\forall x \in [0; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ donc le signe dépend uniquement de $-2\cos(x) + 1$.

Soit $x \in [0; \pi]$

$$-2\cos(x) + 1 \geq 0$$

$$-2\cos(x) + 1 \geq 0$$

$$1 \geq 2\cos(x)$$

$$\frac{1}{2} \geq \cos(x)$$

$$\cos(x) \leq \frac{1}{2}$$

D'après le cercle trigonométrique

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$$

De plus

$$f(0) = \frac{1}{2}\cos(0) - \cos(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2}\cos(2\pi) - \cos(\pi) = \frac{1}{2} \times 1 - (-1) = \frac{3}{2}$$

Donc le tableau de signes et de variations est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

5. Comme la fonction est paire on a donc :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

On a donc déterminé les variations sur toute la période car la longueur de l'intervalle $[-\pi; \pi]$ est 2π . On peut donc répéter pour avoir le tableau de variation sur $[-\pi; 3\pi]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$	3π
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$