

Extrait BAC Polynésie septembre 2015

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ , $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

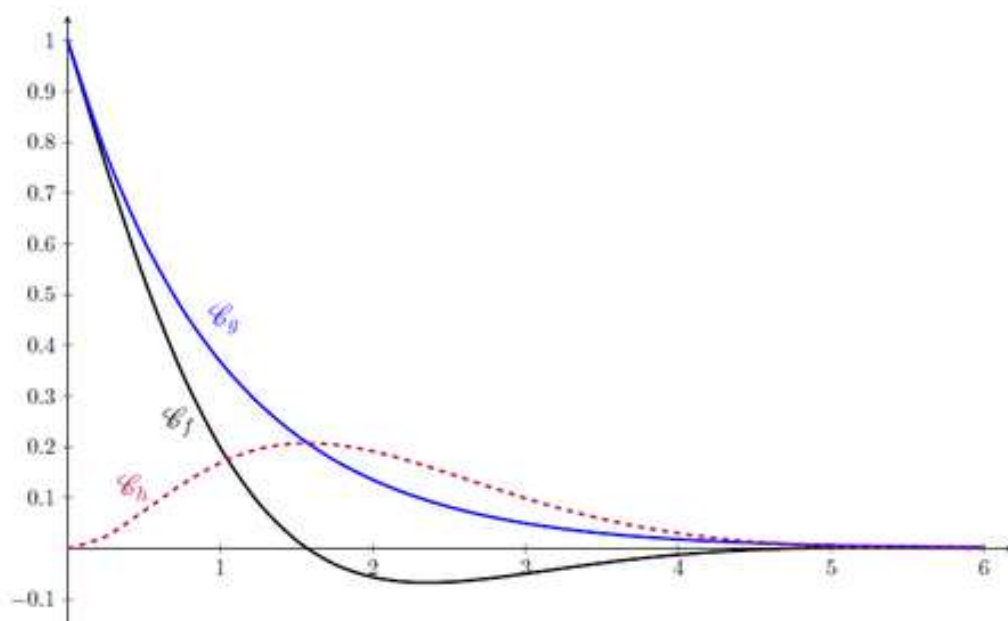
$$f(x) = e^{-x} \cos(x)$$

et

$$g(x) = e^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f , g et h sont données ci-dessous, dans un repère orthogonal.



1) Conjecturer :

- les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
- la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$;
- la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.

2) Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3) Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4)

- On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$h'(x) = e^{-x} \left[\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right].$$

- Justifier que, sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$,

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0.$$

- En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

5) On admet que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2} e^{-x} [-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$

est une primitive de la fonction h .

On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.