

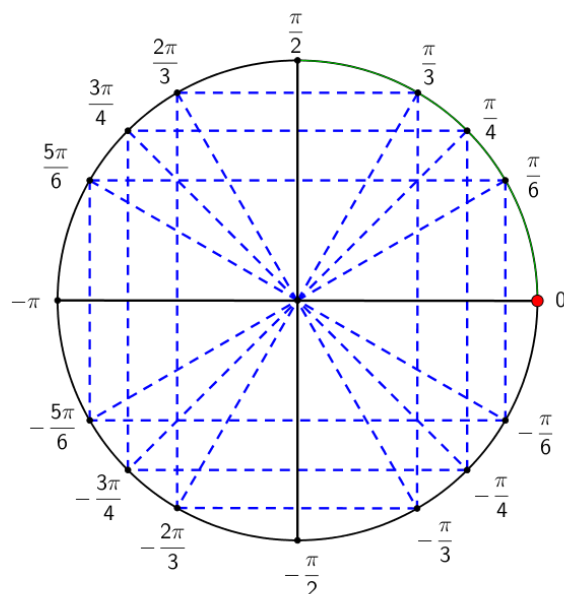
FONCTION TRIGONOMETRIQUES

I Rappels sur le cercle trigonométrique

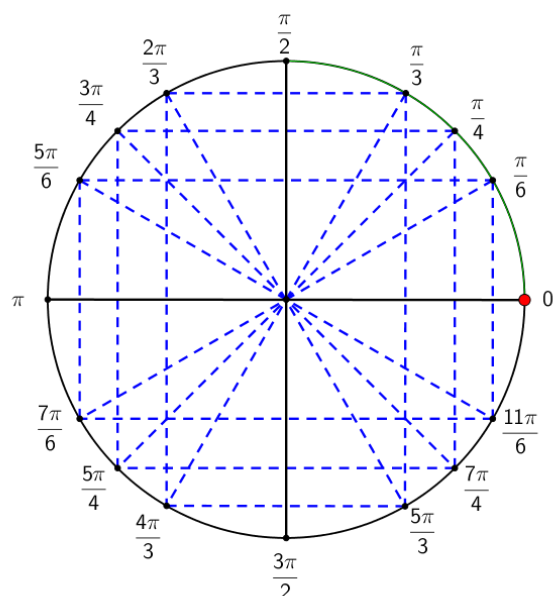
Définition : Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on appelle cercle trigonométrique un cercle de centre O de rayon 1 et muni d'un sens de parcours appelé sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre)

Pour chaque point du cercle, il existe un unique réel appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ appelé mesure principale.

On obtient le cercle suivant :



De même dans $[0; 2\pi[$



II cosinus et sinus d'un réel

Définition :

Soit x un réel et M son point associé sur le cercle trigonométrique.

On appelle cosinus du réel x , noté $\cos x$, l'abscisse du point M et sinus du réel x , noté $\sin x$, l'ordonnée du point M . Ainsi M a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$

Rappel : On a le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriétés algébriques

Pour tout réel x , on a les propriétés suivantes :

i) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ii) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

iii) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

iv) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

En utilisant iii) et iv), on peut compléter le tableau suivant :

x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple :

- Résolvons dans $[0 ; \pi]$ l'équation $1 - 2 \sin x = 0$,

$$1 - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{donc } x = \frac{\pi}{6} \text{ et } x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{soit } S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

- Résolvons dans $] - \pi; \pi]$ l'inéquation $\sqrt{2} \cos x - 1 > 0$

$$\sqrt{2} \cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc } x \in] - \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} [$$

III Fonction sinus et cosinus

1) Définition et dérivation

Définition :

On appelle fonction cosinus et sinus les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f: x \mapsto \cos x \text{ et } g: x \mapsto \sin x$$

Propriété :

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$, alors

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin x \quad \text{et} \quad g'(x) = \cos x$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos x \quad (\text{on dit que la fonction cosinus est paire})$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin x \quad (\text{on dit que la fonction sinus est impaire})$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$

(on dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π)

2) Etude de la fonction cosinus

Soit f définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \cos x$,

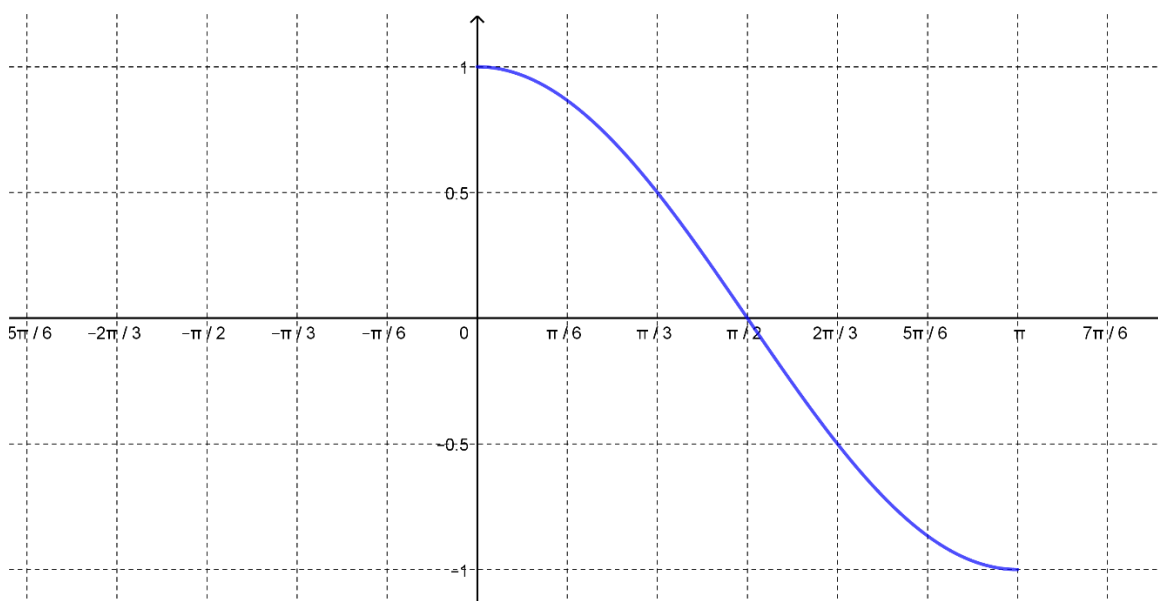
On a pour tout réel $x \in [0; \pi]$, $f'(x) = -\sin x$

Or, pour tout réel $x \in [0; \pi]$, $\sin x \geq 0$

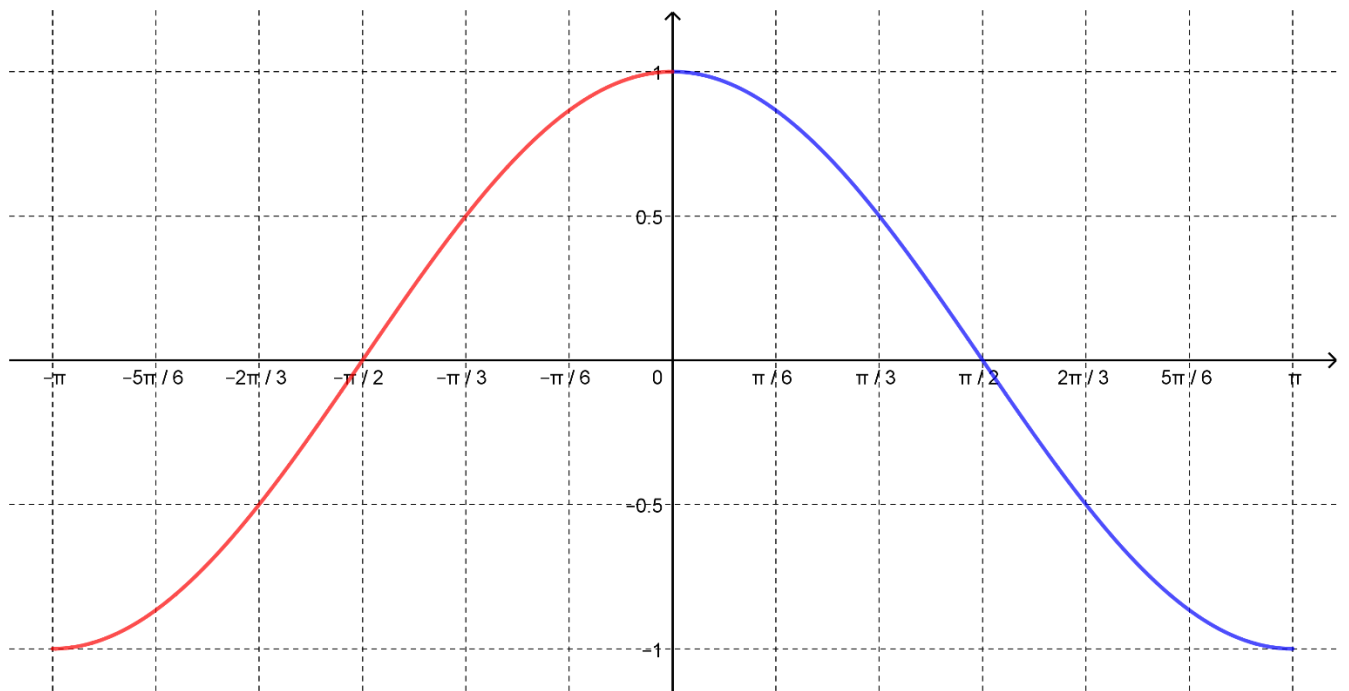
Donc, pour tout réel $x \in [0; \pi]$, $f'(x) \leq 0$

x	0	π
$f'(x)$	—	
f	1	→ -1

On peut alors représenter la courbe sur $[0; \pi]$ en utilisant les variations de f et le tableau de valeurs remarquables du cosinus :

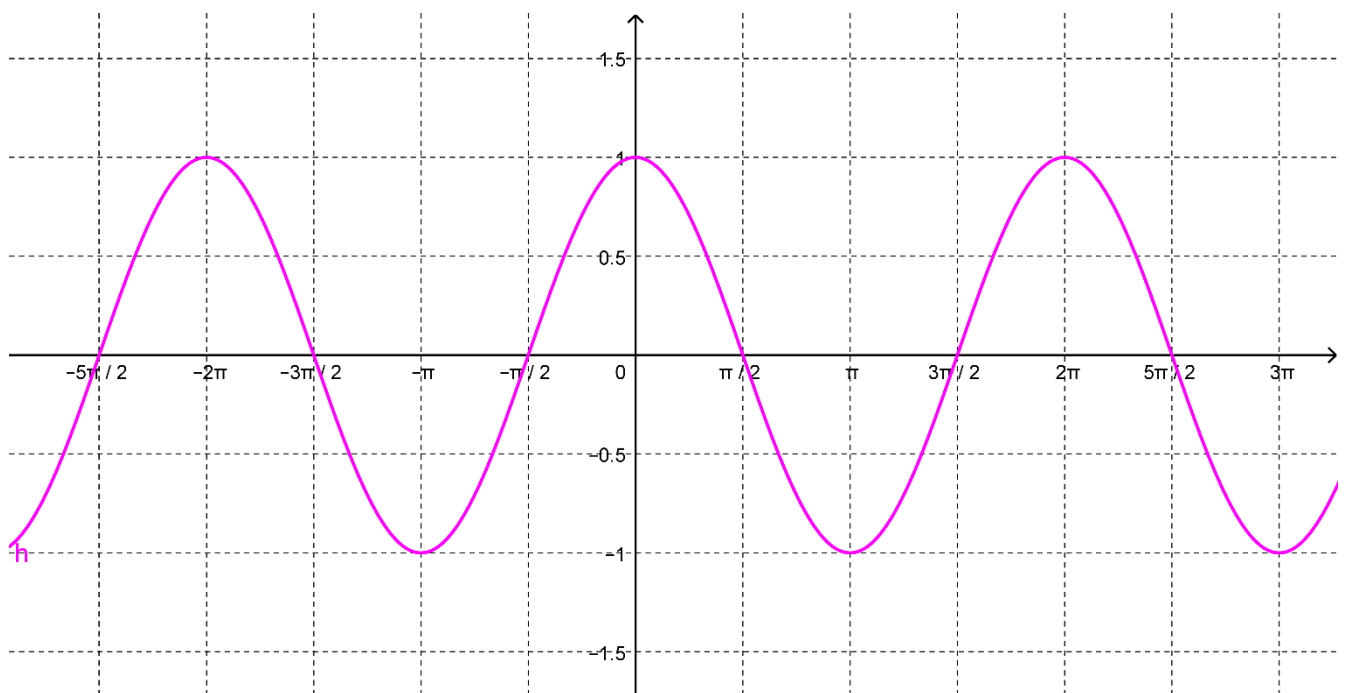


Or la fonction cosinus étant paire, sa courbe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, on peut donc la représenter sur $[-\pi ; 0]$ (en rouge) :



De plus la fonction cosinus est périodique de période 2π , sa courbe se reproduit donc identique à elle-même sur chaque intervalle de longueur 2π

Comme nous connaissons sa représentation sur $[-\pi; \pi]$ qui a pour longueur 2π , on peut ainsi représenter la courbe sur $\mathbb{R}$:



3) Etude de la fonction sinus

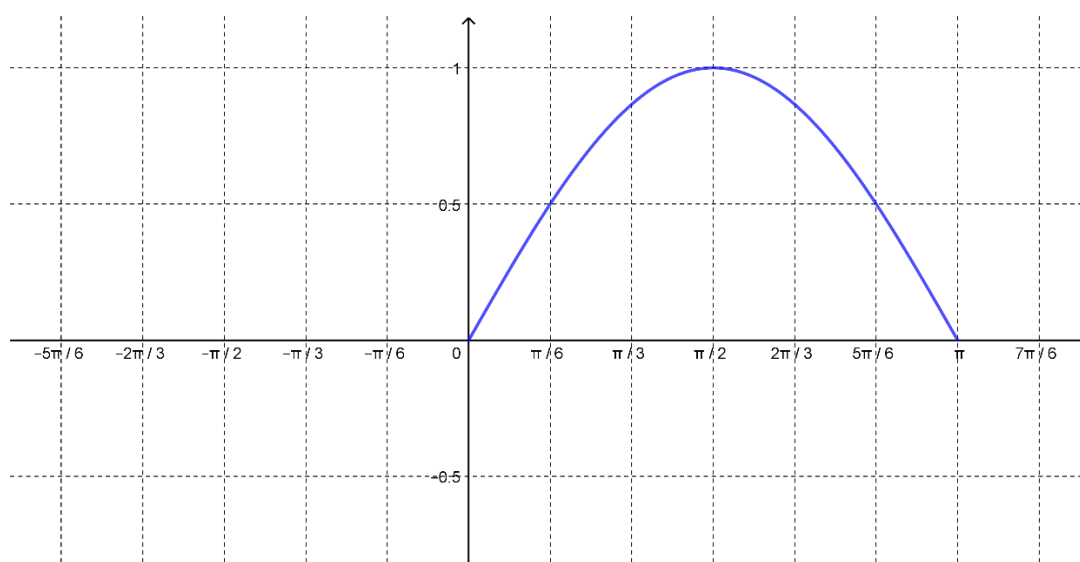
Soit f définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \sin x$,

On a pour tout réel $x \in [0; \pi]$, $f'(x) = \cos x$

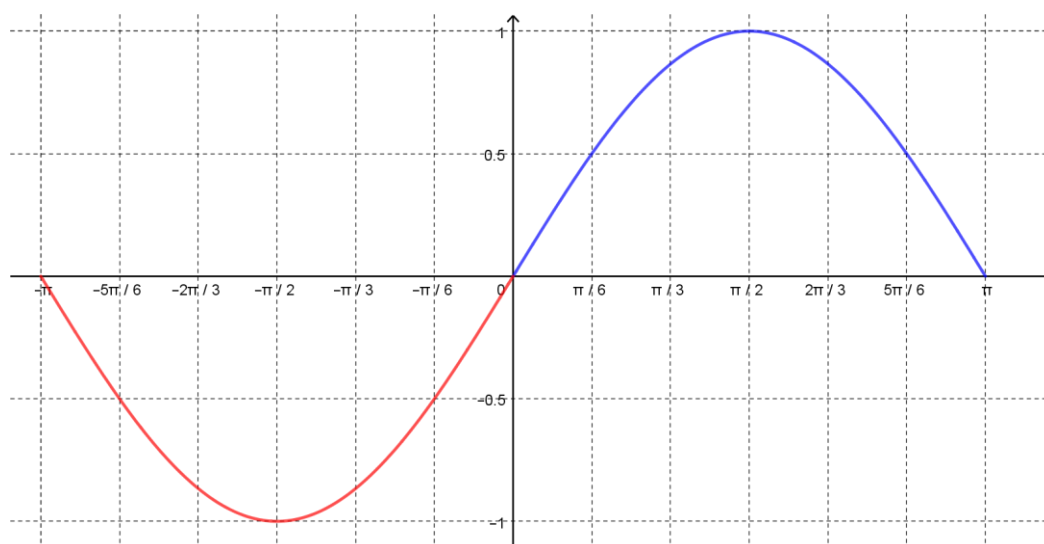
Or, sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geq 0$ et sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, $\cos x \leq 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	1	0

On peut alors représenter la courbe sur $[0; \pi]$ en utilisant les variations de f et le tableau de valeurs remarquables du sinus :

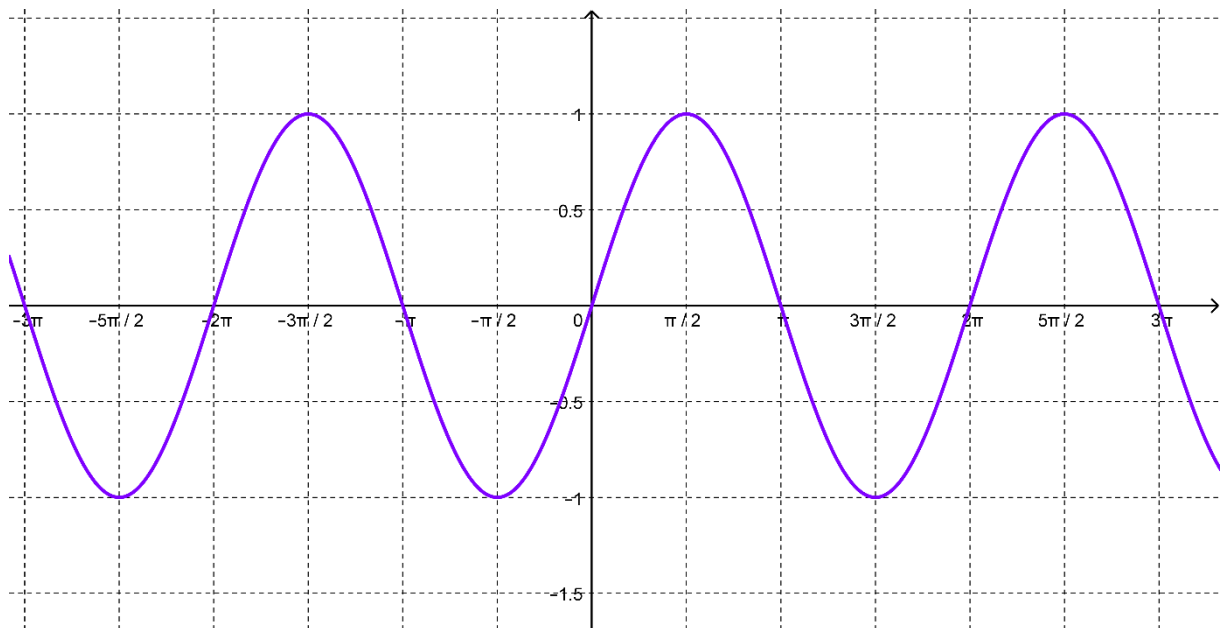


Or la fonction sinus étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère, on peut donc la représenter sur $[-\pi; 0]$ (en rouge) :



De plus la fonction sinus est périodique de période 2π , sa courbe se reproduit donc identique à elle-même sur chaque intervalle de longueur 2π

Comme nous connaissons sa représentation sur $[-\pi; \pi]$ qui a pour longueur 2π , on peut ainsi représenter la courbe sur $\mathbb{R}$:



4) Fonctions de la forme $\cos u$ et $\sin u$

Propriété :

Soit u une fonction définie sur un ensemble E .

On pose f et g deux fonctions définies sur E par $f(x) = \cos(u(x))$ et $g(x) = \sin(u(x))$

Alors, pour tout réel $x \in E$:

$$f'(x) = -u'(x) \times \sin(u(x)) \quad \text{et} \quad g'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$$

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x) + 4 \sin(x^2 + 1)$

On a alors pour tout réel x , $f'(x) = -3 \times \sin(3x) + 4 \times 2x \times \cos(x^2 + 1)$
 $= -3 \sin(3x) + 8x \cos(x^2 + 1)$