

Feuille d'exercices intégrales et suites

Intégrales et suites

Terminale spécialité Mathématiques

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n)$$

et on pose

$$I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
(b) Étudier les variations de f_n sur $[0; +\infty[$.
(c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n et interpréter graphiquement le résultat.
(Pour le calcul de I_n , on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

-)
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $0 \leq I_n \leq \ln 2$.
(b) Étudier les variations de la suite (I_n) .
(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
 3. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

- (a) Étudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.
- (b) En déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul et pour tout x réel positif :

$$\ln(1 + x^n) \leq x^n.$$

- (c) En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx.$$

1. (a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
(b) Calculer u_1 . En déduire u_0 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

- (b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .