

Préparer sa rentrée en Terminale – Les bases

Calcul numérique, calcul littéral, équations, signes et inéquations

Mathématiques – Terminale – Enseignement de spécialité

Cette fiche reprend les automatismes de calcul indispensables pour aborder la Terminale. Les corrections s'affichent ou non selon le réglage de **showcorr** en tête de fichier.

1 Calcul numérique

Prérequis

- Règles de calcul sur les fractions et les puissances.
- Racine carrée d'un nombre réel positif et règles de calcul.

Exercice 1: Puissances

Écrire chaque nombre sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{3^{27} - 3^{29}}{3^{28}} \quad B = \frac{3^{-6} \times 5^5}{(5^2)^3 \times 3^{-5}}$$

Correction de l'exercice 1

Règles utilisées. Pour tous réels non nuls a, b et tous entiers m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{m \times n}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

1. **Calcul de A.** On ne peut pas soustraire directement deux puissances : $3^{27} - 3^{29}$ n'est pas égal à 3^{-2} . On commence donc par **factoriser** le numérateur par la plus petite puissance, 3^{27} , en remarquant que $3^{29} = 3^{27} \times 3^2$:

$$3^{27} - 3^{29} = 3^{27} \times 1 - 3^{27} \times 3^2 = 3^{27} (1 - 3^2).$$

De même, on écrit le dénominateur $3^{28} = 3^{27} \times 3$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \frac{3^{27} (1 - 3^2)}{3^{27} \times 3} \\ &= \frac{1 - 3^2}{3} && \text{(on simplifie par } 3^{27} \neq 0) \\ &= \frac{1 - 9}{3} \\ &= -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

La fraction est irréductible car 8 et 3 n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

2. **Calcul de B.** On regroupe les puissances de 3 d'un côté et celles de 5 de l'autre.

D'abord, $(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$. Donc

$$\begin{aligned} B &= \frac{3^{-6}}{3^{-5}} \times \frac{5^5}{5^6} \\ &= 3^{-6-(-5)} \times 5^{5-6} \\ &= 3^{-1} \times 5^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Attention au signe : $-6 - (-5) = -6 + 5 = -1$.

Exercice 2: Racines carrées

Simplifier les nombres suivants, en les écrivant sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible (ou sous forme d'un entier si possible).

$$C = \sqrt{48} \qquad D = \sqrt{36 + 64} \qquad E = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$$

Correction de l'exercice 2

Règle utilisée. Pour tous réels positifs a et b : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, et en particulier $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$.

Méthode. On cherche à écrire le nombre sous la racine comme produit d'un **carré parfait** (4, 9, 16, 25, 36...) le plus grand possible et d'un autre entier.

1. $48 = 16 \times 3$ et $16 = 4^2$ est le plus grand carré parfait qui divise 48. Donc

$$C = \sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

2. **Piège classique :** $\sqrt{36 + 64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$! La racine carrée ne se « distribue » pas sur une somme. On calcule d'abord la somme :

$$D = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

(Si l'on avait écrit $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$, on aurait commis une erreur.)

3. On simplifie chaque racine séparément : $27 = 9 \times 3 = 3^2 \times 3$ et $48 = 4^2 \times 3$. Donc

$$\begin{aligned} E &= 5\sqrt{3^2 \times 3} - 3\sqrt{4^2 \times 3} \\ &= 5 \times 3\sqrt{3} - 3 \times 4\sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \\ &= (15 - 12)\sqrt{3} && \text{(on factorise par } \sqrt{3}) \\ &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Exercice 3: Quantités conjuguées

Écrire les nombres suivants sans racine carrée au dénominateur.

$$H = \frac{-2}{\sqrt{7}-2} \qquad I = \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

Correction de l'exercice 3

Méthode. Pour faire disparaître la racine du dénominateur, on multiplie le numérateur *et* le dénominateur par la **quantité conjuguée** du dénominateur : la quantité conjuguée de $a - \sqrt{b}$ est $a + \sqrt{b}$ (et inversement). On utilise alors l'identité remarquable

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

qui fait apparaître $(\sqrt{b})^2 = b$: il n'y a plus de racine.

1. Le dénominateur est $\sqrt{7}-2$, sa quantité conjuguée est $\sqrt{7}+2$.

$$\begin{aligned} H &= \frac{-2}{\sqrt{7}-2} \times \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} \\ &= \frac{-2(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7})^2 - 2^2} \\ &= \frac{-2\sqrt{7}-4}{7-4} \\ &= \frac{-2\sqrt{7}-4}{3}. \end{aligned}$$

2. Le dénominateur est $3-\sqrt{5}$, sa quantité conjuguée est $3+\sqrt{5}$.

$$I = \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2}.$$

On développe le numérateur par double distributivité :

$$(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 1 \times 3 + 1 \times \sqrt{5} + \sqrt{5} \times 3 + \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5 = 8 + 4\sqrt{5}.$$

Le dénominateur vaut $9 - 5 = 4$. Donc

$$I = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = \frac{8}{4} + \frac{4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}.$$

Exercice 4: Factoriser avec des puissances

Soit n un entier naturel. Factoriser puis simplifier les expressions suivantes.

$$A = -2 \times 5^{n+1} + 2 \times 5^n \qquad B = (n+1) \times 2^{n+1} - n \times 2^n$$

Correction de l'exercice 4

Idée clé. On écrit la puissance la plus grande à l'aide de la plus petite : $5^{n+1} = 5^n \times 5$ et $2^{n+1} = 2^n \times 2$. Le facteur commun apparaît alors.

1.

$$\begin{aligned}
 A &= -2 \times 5^n \times 5 + 2 \times 5^n \\
 &= 2 \times 5^n \times (-5) + 2 \times 5^n \times 1 \\
 &= 2 \times 5^n \times (-5 + 1) && \text{(facteur commun } 2 \times 5^n) \\
 &= 2 \times 5^n \times (-4) \\
 &= -8 \times 5^n.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 B &= (n+1) \times 2^n \times 2 - n \times 2^n \\
 &= 2^n (2(n+1) - n) && \text{(facteur commun } 2^n) \\
 &= 2^n (2n + 2 - n) \\
 &= 2^n (n + 2).
 \end{aligned}$$

Vérification pour $n = 1$: $B = 2 \times 4 - 1 \times 2 = 6$ et $2^1 \times (1 + 2) = 6$. ✓

Exercice 5: Une somme de puissances

Soit n un entier naturel. Écrire $2^n + 2^n$ sous la forme d'une seule puissance de 2.

Correction de l'exercice 5

On additionne deux fois la même quantité :

$$2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^1 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Erreur fréquente : écrire $2^n + 2^n = 2^{2n}$ (on confond somme et produit : c'est $2^n \times 2^n$ qui vaut 2^{2n}) ou 4^n .

Vérification pour $n = 3$: $2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 16 = 2^4$. ✓

2 Calcul littéral**Prérequis**

- Maîtriser les identités remarquables et les priorités de développement.
- Repérer ou mettre en évidence un facteur commun pour factoriser.
- Mettre en évidence une identité remarquable pour factoriser.
- Réduire des expressions au même dénominateur.

Remarque : Les trois identités remarquables

Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Lues de gauche à droite, elles servent à **développer** ; lues de droite à gauche, à **factoriser**.

Activité : Développer des expressions

Recopier et compléter les pointillés.

$$A = 2(3x - 1)^2 - (5x + 3)(2 - 3x)$$

$$A = 2(\dots x^2 - \dots x + 1) - (10x - \dots x^2 + \dots - \dots x)$$

$$A = 18x^2 - \dots x + 2 - 10x + \dots x^2 - \dots + \dots x \quad \text{donc } A = \dots x^2 - \dots x - \dots$$

Correction de l'activité

Étape 1 : développer chaque bloc séparément.

— Avec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, où $a = 3x$ et $b = 1$:

$$(3x - 1)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = 9x^2 - 6x + 1.$$

— Par double distributivité :

$$(5x + 3)(2 - 3x) = 5x \times 2 + 5x \times (-3x) + 3 \times 2 + 3 \times (-3x) = 10x - 15x^2 + 6 - 9x.$$

Étape 2 : distribuer le 2 et le signe $-$. Le signe « $-$ » devant la parenthèse change le signe de *chacun* des termes qu'elle contient :

$$A = 2(9x^2 - 6x + 1) - (10x - 15x^2 + 6 - 9x) = 18x^2 - 12x + 2 - 10x + 15x^2 - 6 + 9x.$$

Étape 3 : réduire en regroupant les termes de même degré :

$$A = (18 + 15)x^2 + (-12 - 10 + 9)x + (2 - 6) = 33x^2 - 13x - 4.$$

Exercice 6: Développer et réduire

Développer et réduire l'expression

$$B = (2x - 9)(3 - 2x) + 5(2x + 1)^2.$$

Correction de l'exercice 6

Priorités. Le carré est prioritaire sur la multiplication par 5 : on développe d'abord $(2x + 1)^2$, puis on multiplie par 5.

— Double distributivité :

$$(2x - 9)(3 - 2x) = 2x \times 3 + 2x \times (-2x) - 9 \times 3 - 9 \times (-2x) = 6x - 4x^2 - 27 + 18x.$$

— Identité remarquable $(a + b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$:

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1, \quad \text{donc} \quad 5(2x + 1)^2 = 20x^2 + 20x + 5.$$

On assemble et on réduit :

$$\begin{aligned} B &= 6x - 4x^2 - 27 + 18x + 20x^2 + 20x + 5 \\ &= (-4 + 20)x^2 + (6 + 18 + 20)x + (-27 + 5) \\ &= 16x^2 + 44x - 22. \end{aligned}$$

Vérification pour $x = 0$: $(-9) \times 3 + 5 \times 1 = -22$. ✓

Exercice 7: Factoriser

Factoriser les expressions suivantes.

$$C = 2(5x - 1)^2 + 10x - 2$$

$$E = (4x - 3)^2 - 25x^2$$

Correction de l'exercice 7

1. **Faire apparaître un facteur commun.** Le facteur $(5x - 1)$ est visible dans le premier terme ; il est « caché » dans le reste : $10x - 2 = 2(5x - 1)$. Donc

$$\begin{aligned} C &= 2(5x - 1)^2 + 2(5x - 1) \\ &= 2(5x - 1) \times (5x - 1) + 2(5x - 1) \times 1 \\ &= 2(5x - 1) [(5x - 1) + 1] && (\text{facteur commun } 2(5x - 1)) \\ &= 2(5x - 1) \times 5x \\ &= 10x(5x - 1). \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi factoriser seulement par $(5x - 1)$, comme dans $C = (5x - 1)(2(5x - 1) + 2) = (5x - 1)(10x - 2 + 2)$: on arrive au même résultat.

2. **Reconnaître une identité remarquable.** $25x^2 = (5x)^2$, donc E est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 4x - 3$ et $b = 5x$:

$$\begin{aligned} E &= (4x - 3)^2 - (5x)^2 \\ &= [(4x - 3) - 5x] [(4x - 3) + 5x] && (a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)) \\ &= (-x - 3)(9x - 3). \end{aligned}$$

On peut aller plus loin : $-x - 3 = -(x + 3)$ et $9x - 3 = 3(3x - 1)$, donc

$$E = -3(x + 3)(3x - 1).$$

Exercice 8: Réduire au même dénominateur

Écrire chaque expression sous la forme d'un seul quotient.

$$B = \frac{2x}{3x - 1} - 5 \quad \text{pour } x \neq \frac{1}{3}$$

$$C = \frac{4}{2x + 6} - \frac{3}{x - 5} \quad \text{pour } x \neq -3 \text{ et } x \neq 5$$

Correction de l'exercice 8

Méthode. Pour additionner ou soustraire deux quotients, on les écrit avec le **même dénominateur** en multipliant numérateur et dénominateur par un même nombre non nul.

1. On écrit 5 sous la forme d'un quotient de dénominateur $3x - 1$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2x}{3x - 1} - \frac{5(3x - 1)}{3x - 1} \\ &= \frac{2x - 5(3x - 1)}{3x - 1} && (\text{attention aux parenthèses!}) \\ &= \frac{2x - 15x + 5}{3x - 1} \\ &= \frac{-13x + 5}{3x - 1}. \end{aligned}$$

2. On remarque d'abord que $2x + 6 = 2(x + 3)$. Un dénominateur commun est donc $2(x + 3)(x - 5)$.

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{4}{2(x+3)} - \frac{3}{x-5} \\
 &= \frac{4(x-5)}{2(x+3)(x-5)} - \frac{3 \times 2(x+3)}{2(x+3)(x-5)} \\
 &= \frac{4(x-5) - 6(x+3)}{2(x+3)(x-5)} \\
 &= \frac{4x - 20 - 6x - 18}{2(x+3)(x-5)} \\
 &= \frac{-2x - 38}{2(x+3)(x-5)} \\
 &= \frac{-2(x+19)}{2(x+3)(x-5)} \\
 &= \frac{-(x+19)}{(x+3)(x-5)}.
 \end{aligned}$$

Sous forme développée : $C = \frac{-x - 19}{x^2 - 2x - 15}$.

Pourquoi garder la forme factorisée ? Elle permet de lire immédiatement les valeurs interdites (-3 et 5) et d'étudier le signe de C avec un tableau de signes.

3 Équations

Prérequis

- Savoir développer et factoriser une expression.
- Connaître et savoir utiliser les identités remarquables.
- Résolution d'une équation du premier degré et d'une équation produit nul.
- Équations du second degré.

Remarque : Deux propriétés fondamentales

- **Produit nul** : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.
- **Quotient nul** : un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul *et* son dénominateur est non nul.

Dans une équation contenant un quotient, on commence **toujours** par chercher les valeurs interdites.

Exercice 9: Équations du premier degré, produit et quotient nuls

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $-x = x + 16$
2. $(-x - 4)(-x + 7) = 0$
3. $9(-3x - 1)(6x - 36) = 0$

$$4. \frac{-3x-1}{8-5x} = 0$$

$$5. \frac{5-8x}{x-2} = 3$$

Correction de l'exercice 9

1. On regroupe les termes en x dans le membre de gauche en soustrayant x des deux côtés :

$$-x = x + 16 \iff -x - x = 16 \iff -2x = 16 \iff x = \frac{16}{-2} = -8.$$

Vérification : $-(-8) = 8$ et $-8 + 16 = 8$. ✓ $S = \{-8\}$.

2. C'est une équation produit nul :

$$(-x-4)(-x+7) = 0 \iff -x-4 = 0 \text{ ou } -x+7 = 0 \iff x = -4 \text{ ou } x = 7.$$

$$S = \{-4; 7\}.$$

3. Le facteur 9 n'est jamais nul, donc seuls les deux autres facteurs peuvent s'annuler :

$$\begin{aligned} 9(-3x-1)(6x-36) = 0 &\iff -3x-1 = 0 \text{ ou } 6x-36 = 0 \\ &\iff -3x = 1 \text{ ou } 6x = 36 \\ &\iff x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 6. \end{aligned}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{3}; 6\right\}.$$

4. **Valeur interdite** : $8-5x = 0 \iff x = \frac{8}{5}$. On résout donc sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{8}{5}\right\}$.

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul (le dénominateur étant non nul) :

$$\frac{-3x-1}{8-5x} = 0 \iff -3x-1 = 0 \text{ et } x \neq \frac{8}{5} \iff x = -\frac{1}{3} \text{ et } x \neq \frac{8}{5}.$$

$$-\frac{1}{3} \text{ n'est pas la valeur interdite, donc } S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}.$$

5. **Valeur interdite** : $x-2 = 0 \iff x = 2$.

Méthode : on se ramène à une comparaison avec 0 en passant tout dans le membre de gauche, puis on réduit au même dénominateur.

$$\begin{aligned} \frac{5-8x}{x-2} = 3 &\iff \frac{5-8x}{x-2} - 3 = 0 \\ &\iff \frac{5-8x}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} = 0 \\ &\iff \frac{5-8x-3x+6}{x-2} = 0 \\ &\iff \frac{11-11x}{x-2} = 0 \\ &\iff 11-11x = 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff x = 1 \text{ et } x \neq 2. \end{aligned}$$

$$\text{Vérification : } \frac{5-8}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3. \quad \checkmark \quad S = \{1\}.$$

Exercice 10: Se ramener à une équation produit nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(5x - 1)(x - 9) - (x - 9)(2x - 1) = 0$
2. $(x - 1)(2x - 7) = 4x^2 - 28x + 49$
3. $x + 1 = \frac{9}{x + 1}$
4. $\frac{3x - 1}{x - 5} = \frac{3x - 4}{x}$

Correction de l'exercice 10

Stratégie générale. Quand une équation n'est pas du premier degré, on ne développe pas au hasard : on passe tout dans un même membre et on **factorise** pour obtenir une équation produit nul.

1. Le facteur commun $(x - 9)$ est visible dans les deux termes :

$$\begin{aligned}
 (5x - 1)(x - 9) - (x - 9)(2x - 1) = 0 &\iff (x - 9)[(5x - 1) - (2x - 1)] = 0 \\
 &\iff (x - 9)(5x - 1 - 2x + 1) = 0 \\
 &\iff (x - 9) \times 3x = 0 \\
 &\iff x - 9 = 0 \text{ ou } 3x = 0 \\
 &\iff x = 9 \text{ ou } x = 0.
 \end{aligned}$$

$$S = \{0; 9\}.$$

2. On reconnaît dans le membre de droite l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 7$:

$$4x^2 - 28x + 49 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = (2x - 7)^2.$$

Le facteur $(2x - 7)$ devient commun :

$$\begin{aligned}
 (x - 1)(2x - 7) = (2x - 7)^2 &\iff (x - 1)(2x - 7) - (2x - 7)^2 = 0 \\
 &\iff (2x - 7)[(x - 1) - (2x - 7)] = 0 \\
 &\iff (2x - 7)(x - 1 - 2x + 7) = 0 \\
 &\iff (2x - 7)(-x + 6) = 0 \\
 &\iff 2x - 7 = 0 \text{ ou } -x + 6 = 0 \\
 &\iff x = \frac{7}{2} \text{ ou } x = 6.
 \end{aligned}$$

$$S = \left\{\frac{7}{2}; 6\right\}.$$

Erreur à éviter : « diviser par $(2x - 7)$ » des deux côtés ferait perdre la solution $x = \frac{7}{2}$.

3. **Valeur interdite :** $x + 1 = 0 \iff x = -1$.

Pour $x \neq -1$, on multiplie les deux membres par $x + 1 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 x + 1 = \frac{9}{x + 1} &\iff (x + 1)^2 = 9 \\
 &\iff (x + 1)^2 - 3^2 = 0 \\
 &\iff (x + 1 - 3)(x + 1 + 3) = 0 \\
 &\iff (x - 2)(x + 4) = 0 \\
 &\iff x = 2 \text{ ou } x = -4.
 \end{aligned}$$

Aucune de ces deux valeurs n'est la valeur interdite -1 . $S = \{-4; 2\}$.

Erreur à éviter : de $(x+1)^2 = 9$, déduire seulement $x+1 = 3$: on oublie la solution négative $x+1 = -3$.

4. **Valeurs interdites** : $x - 5 = 0 \iff x = 5$ et $x = 0$.

Pour $x \neq 0$ et $x \neq 5$, on utilise l'égalité des produits en croix ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ pour b, d non nuls) :

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x-5} = \frac{3x-4}{x} &\iff x(3x-1) = (x-5)(3x-4) \\ &\iff 3x^2 - x = 3x^2 - 4x - 15x + 20 \\ &\iff 3x^2 - x = 3x^2 - 19x + 20 \\ &\iff -x + 19x = 20 && \text{(les } 3x^2 \text{ s'éliminent)} \\ &\iff 18x = 20 \\ &\iff x = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

$$\frac{10}{9} \text{ n'est ni } 0 \text{ ni } 5. \quad S = \left\{ \frac{10}{9} \right\}.$$

Exercice 11: Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $6x^2 - 15x - 9 = 0$
2. $\frac{1}{8}x^2 + x + 2 = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 0$

Correction de l'exercice 11

Rappel. Pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta > 0$: deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

— Si $\Delta = 0$: une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

— Si $\Delta < 0$: aucune solution réelle.

1. On identifie $a = 6$, $b = -15$, $c = -9$.

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \times 6 \times (-9) = 225 + 216 = 441 = 21^2.$$

$\Delta > 0$, donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-15) - 21}{2 \times 6} = \frac{15 - 21}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{15 + 21}{12} = \frac{36}{12} = 3.$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}.$$

Variante plus rapide : tous les coefficients sont divisibles par 3, donc l'équation équivaut à $2x^2 - 5x - 3 = 0$ (mêmes solutions, calculs plus légers).

2. On identifie $a = \frac{1}{8}$, $b = 1$, $c = 2$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{8} \times 2 = 1 - 1 = 0.$$

$\Delta = 0$, donc une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{8}} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4.$$

$$S = \{-4\}.$$

Variante : en multipliant par 8, l'équation équivaut à $x^2 + 8x + 16 = 0$, c'est-à-dire $(x + 4)^2 = 0$.

3. On identifie $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$

$\Delta < 0$, donc l'équation n'admet aucune solution réelle : $S = \emptyset$.

4 Étude de signes et inéquations

Prérequis

- Savoir développer et factoriser une expression.
- Règle des signes pour un produit ou un quotient.
- Étudier le signe d'une fonction affine.
- Inéquations du second degré.

Remarque : Règles à connaître

- Multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un nombre **strictement négatif** change le sens de l'inégalité.
- La fonction affine $x \mapsto mx + p$ (avec $m \neq 0$) s'annule en $-\frac{p}{m}$ et est du signe de m « à droite » de cette valeur.
- Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines, et du signe contraire entre ses racines.

Inéquations du premier degré

Exercice 12: Inéquations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $6x + 7 > 4x + 8$
2. $x + 1 \geq 9x + 25$

Correction de l'exercice 12

1. On regroupe les x à gauche et les constantes à droite :

$$6x + 7 > 4x + 8 \iff 6x - 4x > 8 - 7 \iff 2x > 1 \iff x > \frac{1}{2}.$$

On a divisé par $2 > 0$: le sens de l'inégalité est conservé. $S = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$

2.

$$x + 1 \geq 9x + 25 \iff x - 9x \geq 25 - 1 \iff -8x \geq 24 \iff x \leq \frac{24}{-8} \iff x \leq -3.$$

Attention : on a divisé par $-8 < 0$, donc le sens de l'inégalité **change** ($\geq$ devient $\leq$).
 $S =]-\infty; -3]$ (crochet fermé en -3 car l'inégalité est large).
Vérification avec $x = -4$: $-4 + 1 = -3$ et $9 \times (-4) + 25 = -11$; on a bien $-3 \geq -11$.
 ✓

Signe d'un produit

Exercice 13: Inéquations produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(x - 8)(-1 - 10x) \leq 0$
2. $(3x + 2)^2 - (3x + 2)(5x + 1) \leq 0$

Correction de l'exercice 13

Méthode. Pour étudier le signe d'un produit : on étudie le signe de chaque facteur, on reporte dans un tableau de signes, puis on applique la règle des signes colonne par colonne.

1. Signe de chaque facteur.

- $x - 8 > 0 \iff x > 8$; ce facteur s'annule en 8.
- $-1 - 10x > 0 \iff -10x > 1 \iff x < -\frac{1}{10}$ (division par $-10 < 0$: le sens change); ce facteur s'annule en $-\frac{1}{10}$.

Tableau de signes (on range les valeurs dans l'ordre croissant : $-\frac{1}{10} < 8$) :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{10}$	8	$+\infty$
$x - 8$		−	0	+
$-1 - 10x$	+	0	−	−
produit	−	0	+	−

On cherche où le produit est *négatif ou nul* : les valeurs où il s'annule sont incluses.

$$S = \left] -\infty; -\frac{1}{10} \right] \cup [8; +\infty[.$$

2. On factorise d'abord par le facteur commun $(3x + 2)$:

$$\begin{aligned} (3x + 2)^2 - (3x + 2)(5x + 1) &= (3x + 2)[(3x + 2) - (5x + 1)] \\ &= (3x + 2)(3x + 2 - 5x - 1) \\ &= (3x + 2)(-2x + 1). \end{aligned}$$

L'inéquation équivaut donc à $(3x + 2)(-2x + 1) \leq 0$.

Signe de chaque facteur.

- $3x + 2 > 0 \iff x > -\frac{2}{3}$; s'annule en $-\frac{2}{3}$.
- $-2x + 1 > 0 \iff -2x > -1 \iff x < \frac{1}{2}$; s'annule en $\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x + 1$	$+$	$+$	0	$-$
produit	$-$	0	0	$-$

$$S = \left] -\infty ; -\frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty \right[.$$

Exercice 14: Un problème de produit

La somme de deux nombres réels x et y est égale à 20. On note $P = xy$ leur produit.

- Exprimer y en fonction de x .
- Vérifier que $(7 - x)(13 - x) = x^2 - 20x + 91$, puis montrer que

$$P \geq 91 \iff (7 - x)(13 - x) \leq 0.$$

- En déduire les valeurs de x et de y pour lesquelles le produit P est supérieur ou égal à 91.

Correction de l'exercice 14

$$1. \ x + y = 20 \iff y = 20 - x.$$

2. **Développement :**

$$(7 - x)(13 - x) = 91 - 7x - 13x + x^2 = x^2 - 20x + 91.$$

Équivalence : d'après la question 1, $P = x(20 - x) = 20x - x^2$. Alors

$$P \geq 91 \iff 20x - x^2 \geq 91$$

$$\iff -x^2 + 20x - 91 \geq 0$$

$$\iff x^2 - 20x + 91 \leq 0 \quad (\text{on multiplie par } -1 < 0 : \text{le sens change})$$

$$\iff (7 - x)(13 - x) \leq 0. \quad (\text{d'après le développement ci-dessus})$$

3. **Signe de chaque facteur.**

$$- \ 7 - x > 0 \iff x < 7 ; \text{ s'annule en } 7.$$

$$- \ 13 - x > 0 \iff x < 13 ; \text{ s'annule en } 13.$$

x	$-\infty$	7	13	$+\infty$	
$7 - x$	$+$	0	$-$	$-$	
$13 - x$	$+$	$+$	0	$-$	
produit	$+$	0	$-$	0	$+$

Le produit est négatif ou nul pour $x \in [7; 13]$. On a alors $y = 20 - x$: quand x décrit $[7; 13]$, y décrit aussi $[7; 13]$.

Conclusion : $P \geq 91$ si et seulement si $x \in [7; 13]$ et $y = 20 - x$ (et donc $y \in [7; 13]$).
Vérification : pour $x = 7$, $y = 13$ et $P = 91$; pour $x = 10$, $y = 10$ et $P = 100 \geq 91$;
pour $x = 5$, $y = 15$ et $P = 75 < 91$. ✓

Signe d'un quotient

Exercice 15: Inéquations quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\frac{3}{2x-7} \leq 0$
2. $5 + \frac{2}{x+3} \leq 0$
3. $\frac{3}{2x-1} \geq \frac{2}{-3x+15}$

Correction de l'exercice 15

Méthode. Le signe d'un quotient suit la même règle des signes qu'un produit, avec une différence essentielle : les **valeurs interdites** (où le dénominateur s'annule) sont toujours **exclues** de l'ensemble des solutions. On les signale par une double barre dans le tableau.

Erreur à éviter : « faire un produit en croix » dans une inéquation. On ignore le signe des dénominateurs, donc on ne sait pas si le sens de l'inégalité est conservé.

1. **Valeur interdite :** $2x - 7 = 0 \iff x = \frac{7}{2}$.

Le numérateur 3 est strictement positif : le quotient est donc du signe de son dénominateur. Il ne s'annule jamais (numérateur non nul), donc

$$\frac{3}{2x-7} \leq 0 \iff 2x-7 < 0 \iff x < \frac{7}{2}.$$

L'inégalité est stricte car $\frac{7}{2}$ est une valeur interdite. $S = \left] -\infty; \frac{7}{2} \right[$.

2. **Valeur interdite :** $x + 3 = 0 \iff x = -3$.

On se ramène à un seul quotient (le signe d'une somme ne se lit pas directement) :

$$5 + \frac{2}{x+3} = \frac{5(x+3)}{x+3} + \frac{2}{x+3} = \frac{5x+15+2}{x+3} = \frac{5x+17}{x+3}.$$

Signe de chaque terme.

- $5x + 17 > 0 \iff x > -\frac{17}{5}$; s'annule en $-\frac{17}{5} = -3,4$.
- $x + 3 > 0 \iff x > -3$.

On range dans l'ordre : $-3,4 < -3$.

x	$-\infty$	$-\frac{17}{5}$	-3	$+\infty$
$5x + 17$	—	0	+	+
$x + 3$	—	—	0	+
quotient	+	0	—	+

$$S = \left[-\frac{17}{5}; -3 \right[.$$

Crochet fermé en $-\frac{17}{5}$ (le quotient y vaut 0), ouvert en -3 (valeur interdite).

3. **Valeurs interdites :** $2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ et $-3x + 15 = 0 \iff x = 5$.

On passe tout dans le membre de gauche, puis on réduit au même dénominateur $(2x - 1)(-3x + 15)$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x-1} &\geq \frac{2}{-3x+15} \iff \frac{3}{2x-1} - \frac{2}{-3x+15} \geq 0 \\ &\iff \frac{3(-3x+15)}{(2x-1)(-3x+15)} - \frac{2(2x-1)}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0 \\ &\iff \frac{-9x+45-4x+2}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0 \\ &\iff \frac{-13x+47}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0. \end{aligned}$$

Signe de chaque facteur.

- $-13x + 47 > 0 \iff x < \frac{47}{13}$; s'annule en $\frac{47}{13} \approx 3,6$.
- $-3x + 15 > 0 \iff x < 5$.
- $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$.

On range dans l'ordre : $\frac{1}{2} < \frac{47}{13} < 5$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{13}$	5	$+\infty$
$-13x + 47$	+	+	0	-	-
$2x - 1$	-	0	+	+	+
$-3x + 15$	+	+	+	0	-
quotient	-	+	0	-	+

On cherche où le quotient est *positif ou nul* :

$$S = \left] \frac{1}{2}; \frac{47}{13} \right] \cup]5; +\infty[.$$

Signe d'un polynôme du second degré

Exercice 16: Inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $2x^2 - 5x - 42 \geq 0$
2. $\frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 5} \leq 0$

Correction de l'exercice 16

1. On identifie $a = 2$, $b = -5$, $c = -42$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-42) = 25 + 336 = 361 = 19^2.$$

$\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{5 - 19}{2 \times 2} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + 19}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est **positif à l'extérieur des racines** et négatif entre elles (la parabole est tournée vers le haut).

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	6	$+\infty$	
$2x^2 - 5x - 42$	+	0	-	0	+

$$S = \left] -\infty ; -\frac{7}{2} \right] \cup [6 ; +\infty[.$$

2. **Valeur interdite** : $2x + 5 = 0 \iff x = -\frac{5}{2}$.

Signe du numérateur $x^2 - 2x - 3$. On identifie $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2.$$

Deux racines : $x_1 = \frac{2 - 4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2 + 4}{2} = 3$.

Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur de $[-1 ; 3]$ et négatif à l'intérieur.

Vérification : $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$. ✓

Signe du dénominateur : $2x + 5 > 0 \iff x > -\frac{5}{2}$.

On range dans l'ordre : $-\frac{5}{2} < -1 < 3$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-1	3	$+\infty$		
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$	
$2x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
quotient	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On cherche où le quotient est *négatif ou nul* (en excluant la valeur interdite) :

$$S = \left] -\infty ; -\frac{5}{2} \right[\cup [-1 ; 3].$$