Devoir commun n° 1 – Corrigé

Durée : 1 h — Calculatrice autorisée.

Exercice 1

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A – Recherche d'une formule explicite pour la suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4\,000, \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1\,000 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.

Corrigé. En appliquant deux fois la relation de récurrence, on obtient :

$$u_1 = 0{,}8 \times 4\,000 + 1\,000 = \boxed{4\,200}, \qquad u_2 = 0{,}8 \times 4\,200 + 1\,000 = \boxed{4\,360}.$$

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.

Corrigé. D'une part,

$$u_1 - u_0 = 200 \qquad \text{et} \qquad u_2 - u_1 = 160.$$

Ces différences étant distinctes, **la suite (u_n) n'est pas arithmétique**.
D'autre part,

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4\,200}{4\,000} = \frac{21}{20} = 1{,}05, \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{4\,360}{4\,200} = \frac{109}{105} \simeq 1{,}04.$$

Ces rapports sont donc distincts. Ainsi, **la suite (u_n) n'est pas géométrique**.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 5\,000$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison ainsi que son premier terme v_0.

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5\,000 \\ v_{n+1} &= 0{,}8u_n + 1\,000 - 5\,000 \\ v_{n+1} &= 0{,}8u_n - 4\,000 \\ v_{n+1} &= 0{,}8(u_n - 5\,000) = 0{,}8v_n. \end{aligned}$$

De plus, $v_0 = u_0 - 5\,000 = 4\,000 - 5\,000 = -1\,000$. La suite (v_n) est donc **géométrique de raison** $0{,}8$ **et de premier terme** $v_0 = -1\,000$.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Corrigé. La formule du terme général d'une suite géométrique donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times 0{,}8^n, \qquad \boxed{v_n = -1\,000 \times 0{,}8^n}.$$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5\,000$, donc $u_n = v_n + 5\,000$. Par conséquent,

$$\boxed{u_n = 5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^n}.$$

4. Calculer u_{17}. On donnera une valeur arrondie à l'unité.

Corrigé. En utilisant la formule précédente,

$$u_{17} = 5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^{17} \simeq 4\,977{,}482.$$

Ainsi, **l'arrondi de u_{17} à l'unité est** $4\,977$.

Partie B – Retrouvons les résultats par une autre méthode

En repartant de la définition de la suite (u_n), à savoir

$$\begin{cases} u_0 = 4\,000, \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1\,000 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Redémontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^n.$$

Corrigé. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition :

$$u_n = 5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^n.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^0 = 5\,000 - 1\,000 = 4\,000 = u_0.$$

La proposition $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n = 5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^n$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. La relation de récurrence et l'hypothèse de récurrence (H.R.) donnent :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}8u_n + 1\,000 \\ u_{n+1} &\overset{\text{H.R.}}{=} 0{,}8\left(5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^n\right) + 1\,000 \\ u_{n+1} &= 4\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^{n+1} + 1\,000 \\ u_{n+1} &= 5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^{n+1}. \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion. La proposition est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^n}.$$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3 - u_n}.$$

a. Calculer les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 (on pourra arrondir les résultats au centième), puis conjecturer les variations de la suite (u_n).

Corrigé. On a $u_0 = 1$, puis

$$u_1 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5, \qquad u_2 = \frac{1}{3-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} = 0{,}4, \qquad u_3 = \frac{1}{3-\frac{2}{5}} = \frac{5}{13} \simeq 0{,}38.$$

Ces premiers termes permettent de **conjecturer que la suite (u_n) est décroissante**. Il s'agit d'une conjecture : l'observation des premiers termes ne constitue pas une démonstration pour tous les rangs.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

Corrigé. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \leq 1.$$

La proposition $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$.
En multipliant les inégalités de l'hypothèse de récurrence par -1, on renverse leur sens :

$$0 \geq -u_{n+1} \geq -u_n \geq -1.$$

Puis, en ajoutant 3 à chaque membre, on obtient :

$$3 \geq 3 - u_{n+1} \geq 3 - u_n \geq 2.$$

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Le passage aux inverses renverse donc l'ordre des inégalités :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3-u_{n+1}} \leq \frac{1}{3-u_n} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{3} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Puisque $0 \leq \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2} \leq 1$, on en déduit, a fortiori,

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1.$$

La proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion. La proposition est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1}.$$

c. À l'aide d'une phrase en français, interpréter le résultat démontré à la question b.

Corrigé. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 et majorée par 1.