Devoir commun n° 1

Durée : 1 h — Calculatrice autorisée.

Exercice 1

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A – Recherche d'une formule explicite pour la suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4\,000, \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1\,000 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 5\,000$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison ainsi que son premier terme v_0.
   b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   c. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{17}. On donnera une valeur arrondie à l'unité.

Partie B – Retrouvons les résultats par une autre méthode

En repartant de la définition de la suite (u_n), à savoir

$$\begin{cases} u_0 = 4\,000, \\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1\,000 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Redémontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 5\,000 - 1\,000 \times 0{,}8^n.$$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3 - u_n}.$$

a. Calculer les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 (on pourra arrondir les résultats au centième), puis conjecturer les variations de la suite (u_n).

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

c. À l'aide d'une phrase en français, interpréter le résultat démontré à la question b.