Devoir commun n° 2 — Corrigé

Durée : 2 h – Calculatrice autorisée.

Consignes générales. Justifier les réponses et encadrer les résultats importants. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Toute trace de recherche pertinente sera valorisée.

Exercice 1 ▶ 8 points

Une entreprise gère un stock de vélos électriques. On modélise ce stock par une suite (u_n) : u_n représente une estimation du nombre de vélos en stock au début du mois n. Au départ, l'entreprise possède 50 vélos, soit $u_0 = 50$. Chaque mois, elle vend 40 % de son stock et reçoit 12 nouveaux vélos d'un fournisseur.

On admet que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 12.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

Corrigé. On applique la relation de récurrence :

$$u_1 = 0{,}6 \times 50 + 12 = \boxed{42}, \qquad u_2 = 0{,}6 \times 42 + 12 = \boxed{37{,}2}.$$

Il s'agit des valeurs du modèle, et non nécessairement de nombres entiers de vélos.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a l'inégalité

$$u_n \geq 30.$$

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n \geq 30$ ».

Initialisation. $u_0 = 50 \geq 30$: $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, soit $u_n \geq 30$. Montrons que $u_{n+1} \geq 30$. Comme $0{,}6 > 0$, l'hypothèse de récurrence entraîne

$$0{,}6u_n \geq 18, \qquad \text{puis} \qquad 0{,}6u_n + 12 \geq 30.$$

Or $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 12$. Ainsi $u_{n+1} \geq 30$: $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La proposition est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 30}.$$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = -0{,}4(u_n - 30).$$

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0{,}6u_n + 12 - u_n \\ u_{n+1} - u_n &= -0{,}4u_n + 12 \\ u_{n+1} - u_n &= \boxed{-0{,}4(u_n - 30)}. \end{aligned}$$

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la question 2 donne $u_n - 30 \geq 0$. Puisque $-0{,}4 < 0$, on a $-0{,}4(u_n - 30) \leq 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc $u_{n+1} \leq u_n$. **La suite (u_n) est décroissante.**

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 30$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme v_0.

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 30 \\ v_{n+1} &= 0{,}6u_n + 12 - 30 \\ v_{n+1} &= 0{,}6u_n - 18 \\ v_{n+1} &= 0{,}6(u_n - 30) = 0{,}6v_n. \end{aligned}$$

De plus, $v_0 = u_0 - 30 = 20$. Ainsi, (v_n) **est géométrique de raison** 0,6 **et de premier terme** $v_0 = 20$.

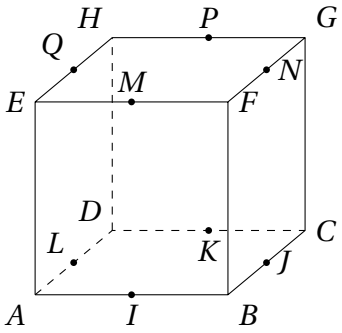
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

Corrigé. La formule du terme général d'une suite géométrique donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0{,}6^n$. Comme $u_n = v_n + 30$, on obtient

$$\boxed{v_n = 20 \times 0{,}6^n} \quad \text{et} \quad \boxed{u_n = 30 + 20 \times 0{,}6^n}.$$

Exercice 2 ▶ 4 points

On considère un cube $ABCDEFGH$. Les points I, J, K, L, M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$.



1. Décomposer les vecteurs suivants dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

a) $\overrightarrow{FC}$ **b)** $\overrightarrow{EG}$ **c)** $\overrightarrow{DN}$ **d)** $\overrightarrow{PB}$

Corrigé. On utilise la relation de Chasles et les égalités vectorielles dans le cube.

a. $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}}$.

b. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$.

c. Comme N est le milieu de $[FG]$, $\overrightarrow{FN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FN} = \boxed{\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}.$$

d. Comme P est le milieu de $[GH]$, $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}}.$$

2. Donner les coordonnées des points J, G et N dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Corrigé. Dans ce repère, les coordonnées d'un point sont les coefficients de la décomposition de son vecteur position dans la base indiquée. Or

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE},$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

D'où $\boxed{J(1;\tfrac{1}{2};0)}$, $\boxed{G(1;1;1)}$ et $\boxed{N(1;\tfrac{1}{2};1)}$.

3. Déterminer les coordonnées du milieu T du segment $[GN]$.

Corrigé. Les coordonnées du milieu sont les moyennes des coordonnées des extrémités :

$$T\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+\frac{1}{2}}{2}; \frac{1+1}{2}\right), \qquad \boxed{T(1;\tfrac{3}{4};1)}.$$

Exercice 3 ▶ 8 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points

$$A(2;3;5), \quad B(-1;-4;-3), \quad C(1;6;2),$$

$$D(-2;3;1), \quad E(-1;0;4),$$

ainsi que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\-24\\-23\end{pmatrix}$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Corrigé. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On calcule

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-7\\-8\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}.$$

S'il existait un réel λ tel que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$, la première coordonnée imposerait $\lambda=3$. La deuxième donnerait alors $-7=9$, ce qui est impossible. Ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires : **les points A, B et C ne sont pas alignés**.

2. Les droites (AE) et (CD) sont-elles parallèles ?

Corrigé. Les droites (AE) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs directeurs sont égaux, donc forcément colinéaires (on peut écrire $\overrightarrow{AE}=1\times\overrightarrow{CD}$). **Les droites (AE) et (CD) sont donc parallèles**.

3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

Corrigé. On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les trois vecteurs sont alors coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, soit

$$\begin{cases} -3a - b = -4, \\ -7a + 3b = 0, \\ -8a - 3b = -4. \end{cases}$$

Notons L_1, L_2 et L_3 les trois lignes. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ élimine b dans la troisième ligne et donne le système équivalent :

$$\begin{cases} -3a - b = -4, \\ -7a + 3b = 0, \\ -15a = -4. \end{cases}$$

La troisième ligne donne $a = \frac{4}{15}$. En remplaçant a par cette valeur dans L_1 et L_2, on obtient :

$$\begin{cases} -3 \times \dfrac{4}{15} - b = -4, \\ -7 \times \dfrac{4}{15} + 3b = 0, \\ a = \dfrac{4}{15} \end{cases} \iff \begin{cases} b = \dfrac{16}{5}, \\ b = \dfrac{28}{45}, \\ a = \dfrac{4}{15}. \end{cases}$$

Les deux premières lignes imposent deux valeurs distinctes de b, puisque $\frac{16}{5} \neq \frac{28}{45}$: elles sont incompatibles. Ce système n'a donc aucune solution. **Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires**.

4. En déduire qu'il existe un unique triplet de réels x, y et z tel que

$$\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}.$$

Corrigé. Trois vecteurs non coplanaires de l'espace forment une base de l'espace. Tout vecteur se décompose de manière unique dans une base. Il existe donc **un unique triplet** $(x; y; z)$ satisfaisant l'égalité demandée.

5. Vérifier que $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Corrigé. Dans la base du repère initial, le vecteur $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -24 \\ -23 \end{pmatrix}.$$

On retrouve les coordonnées de $\vec{u}$ dans cette même base. L'égalité vectorielle est donc vérifiée.

6. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Corrigé. Les coordonnées dans cette base sont les coefficients de l'unique décomposition obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \left(3; -1; \frac{1}{2}\right).}$$

Remarque : les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie. Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(-10; -24; -23)$, tandis que dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, elles sont $(3; -1; \frac{1}{2})$.