Devoir commun n° 2

Durée : 2 h – Calculatrice autorisée.

Consignes générales. Justifier les réponses et encadrer les résultats importants. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Toute trace de recherche pertinente sera valorisée.

Exercice 1 ▶ 8 points

Une entreprise gère un stock de vélos électriques. On modélise ce stock par une suite (u_n) : u_n représente une estimation du nombre de vélos en stock au début du mois n. Au départ, l'entreprise possède 50 vélos, soit $u_0 = 50$. Chaque mois, elle vend 40 % de son stock et reçoit 12 nouveaux vélos d'un fournisseur.

On admet que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 12.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a l'inégalité

$$u_n \geq 30.$$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = -0{,}4(u_n - 30).$$

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 30$.

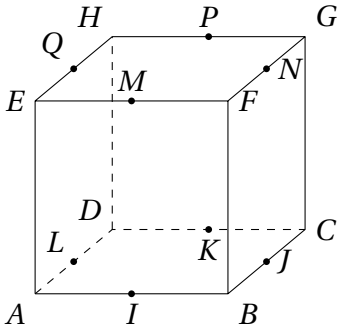
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme v_0.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 2 ▶ 4 points

On considère un cube $ABCDEFGH$. Les points I, J, K, L, M, N, P, Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$.



1. Décomposer les vecteurs suivants dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:
   a) $\overrightarrow{FC}$ **b)** $\overrightarrow{EG}$ **c)** $\overrightarrow{DN}$ **d)** $\overrightarrow{PB}$
2. Donner les coordonnées des points J, G et N dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
3. Déterminer les coordonnées du milieu T du segment $[GN]$.

Exercice 3 ▶ 8 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points

$$A(2;3;5), \quad B(-1;-4;-3), \quad C(1;6;2),$$

$$D(-2;3;1), \quad E(-1;0;4),$$

ainsi que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\-24\\-23\end{pmatrix}$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les droites (AE) et (CD) sont-elles parallèles ?
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.
4. En déduire qu'il existe un unique triplet de réels x, y et z tel que
$$\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}.$$
5. Vérifier que $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
6. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.